ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА дрофа вентана граф

ЕГЭ-2016. Система заданий по формированию умений решения задач с параметрами в УМК авторов А.Г.Мерзляка, В.Б.Полонского, М.С.Якира

М.С. Якир, автор учебников математики системы УМК «Алгоритм успеха» Объединенной издательской группы «ДРОФА»-«ВЕНТАНА-ГРАФ»-«Астрель»

03 апреля 2016

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2016 по математике

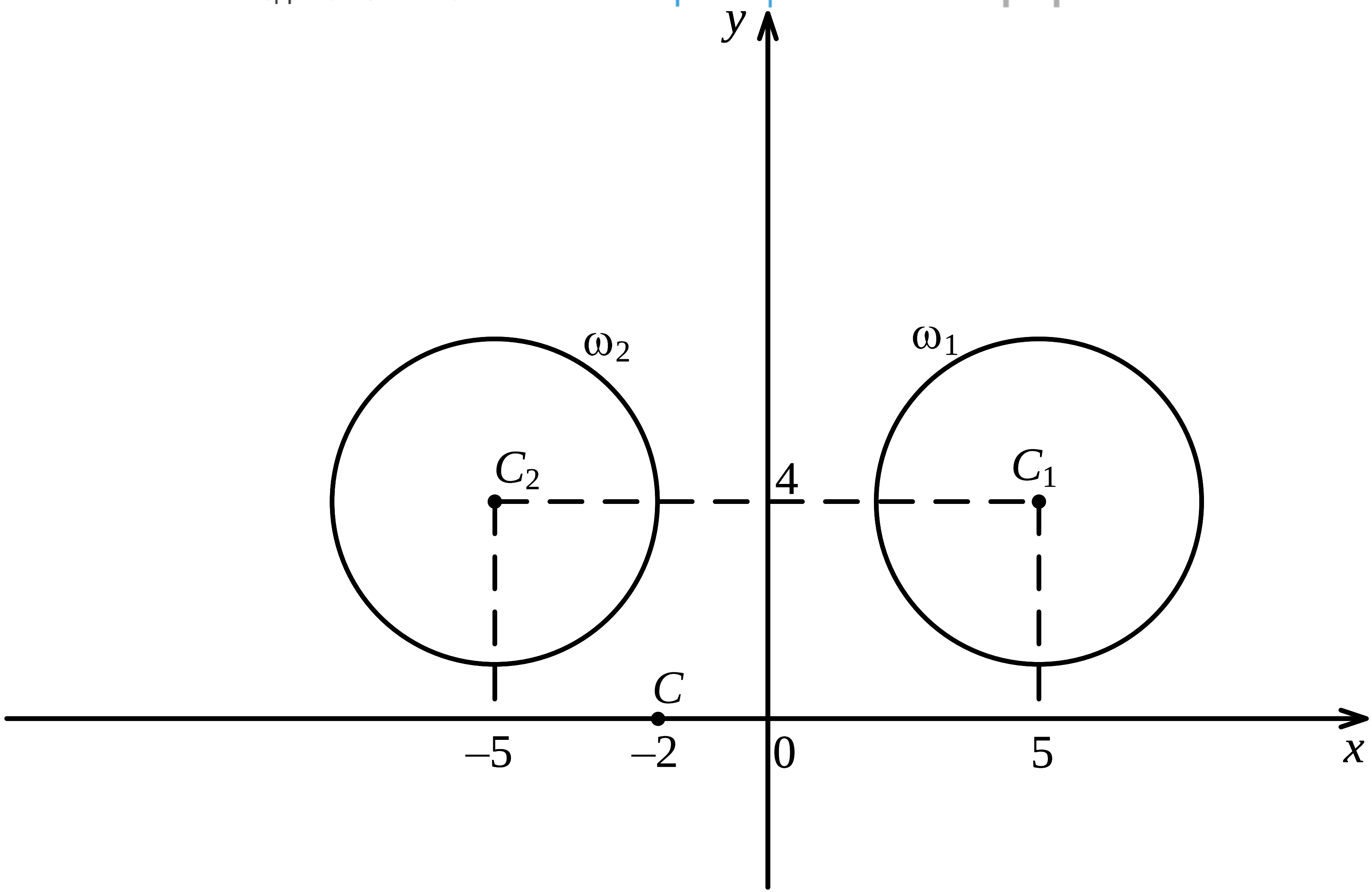
Профильный уровень

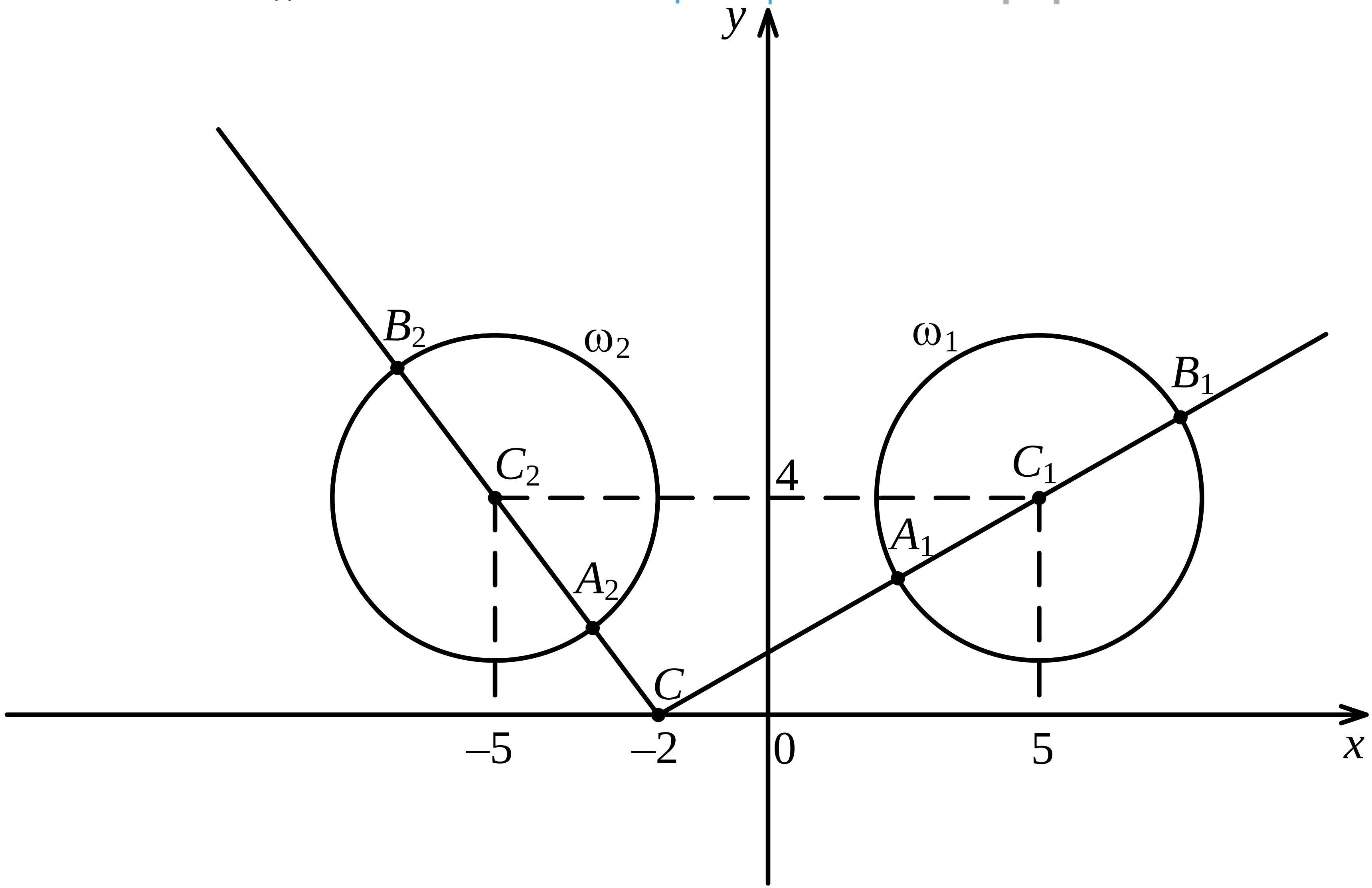
Задание **18**

Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=9, \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

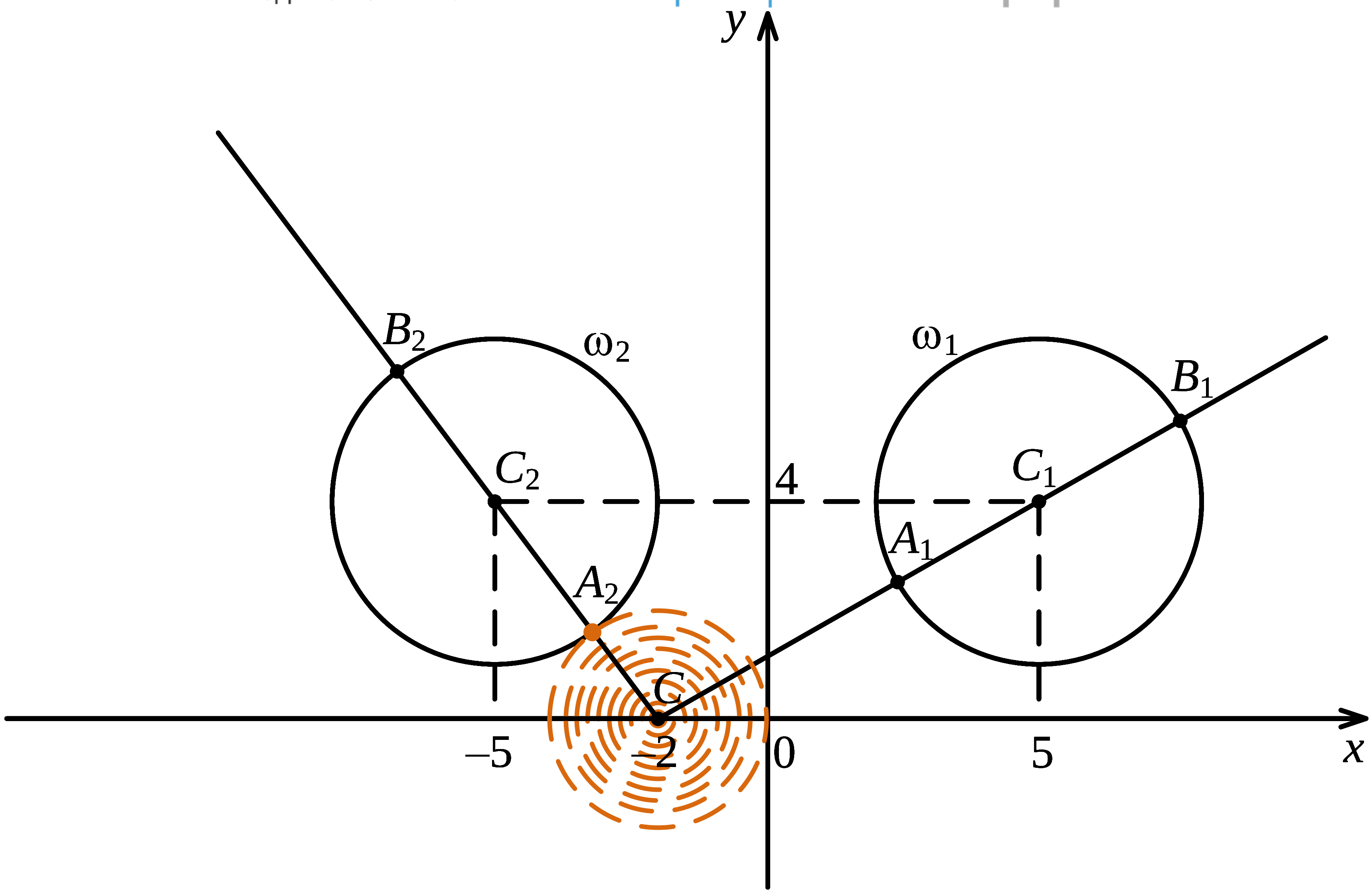
имеет единственное решение.


y
ω2
ω1
C2
C1
4
C
–5
–2
0
5
x



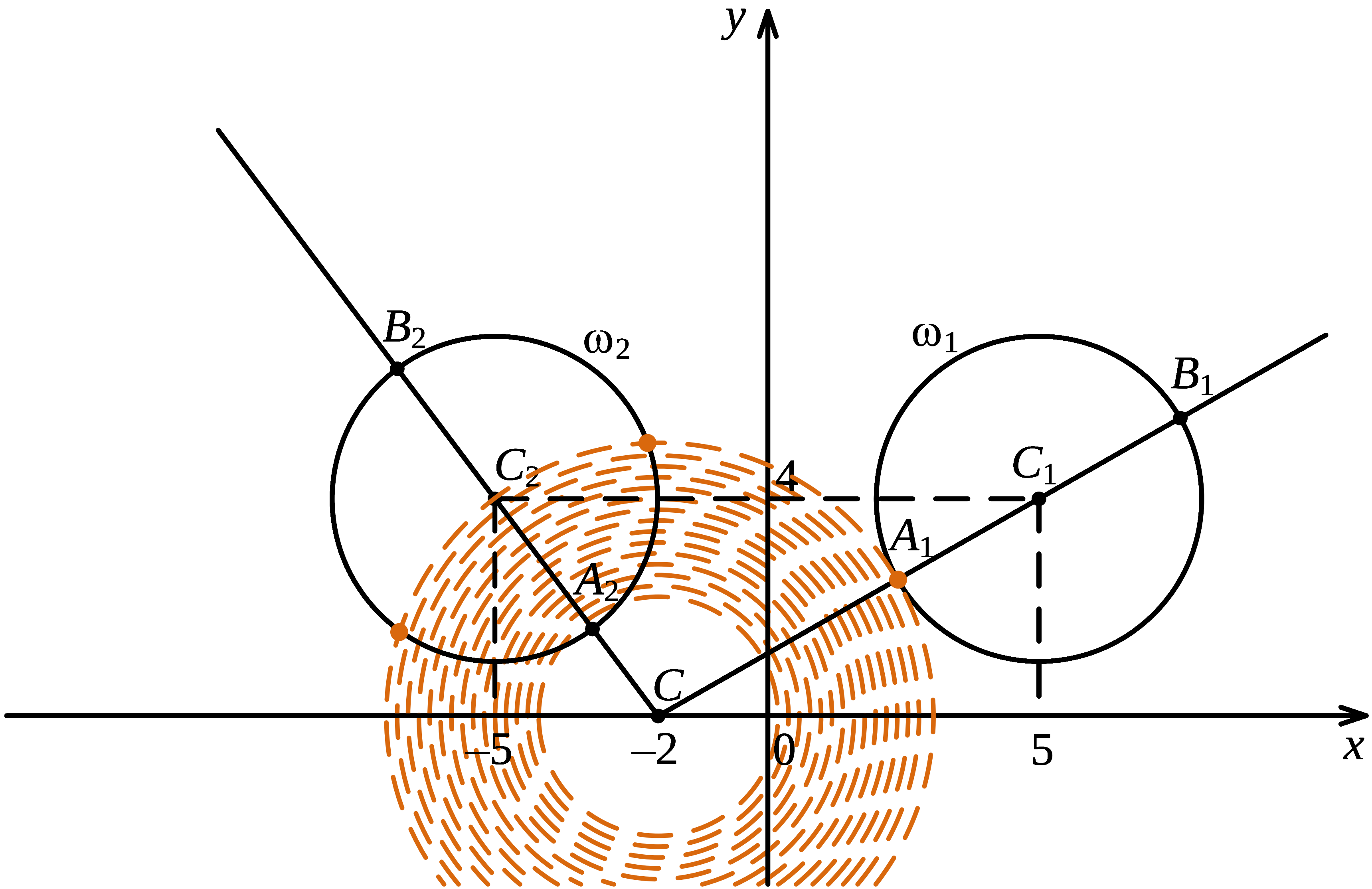
ОБЪЕДИНЕННАЯ
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
дрофа
вентана граф

$0 \leq a \leq 2$

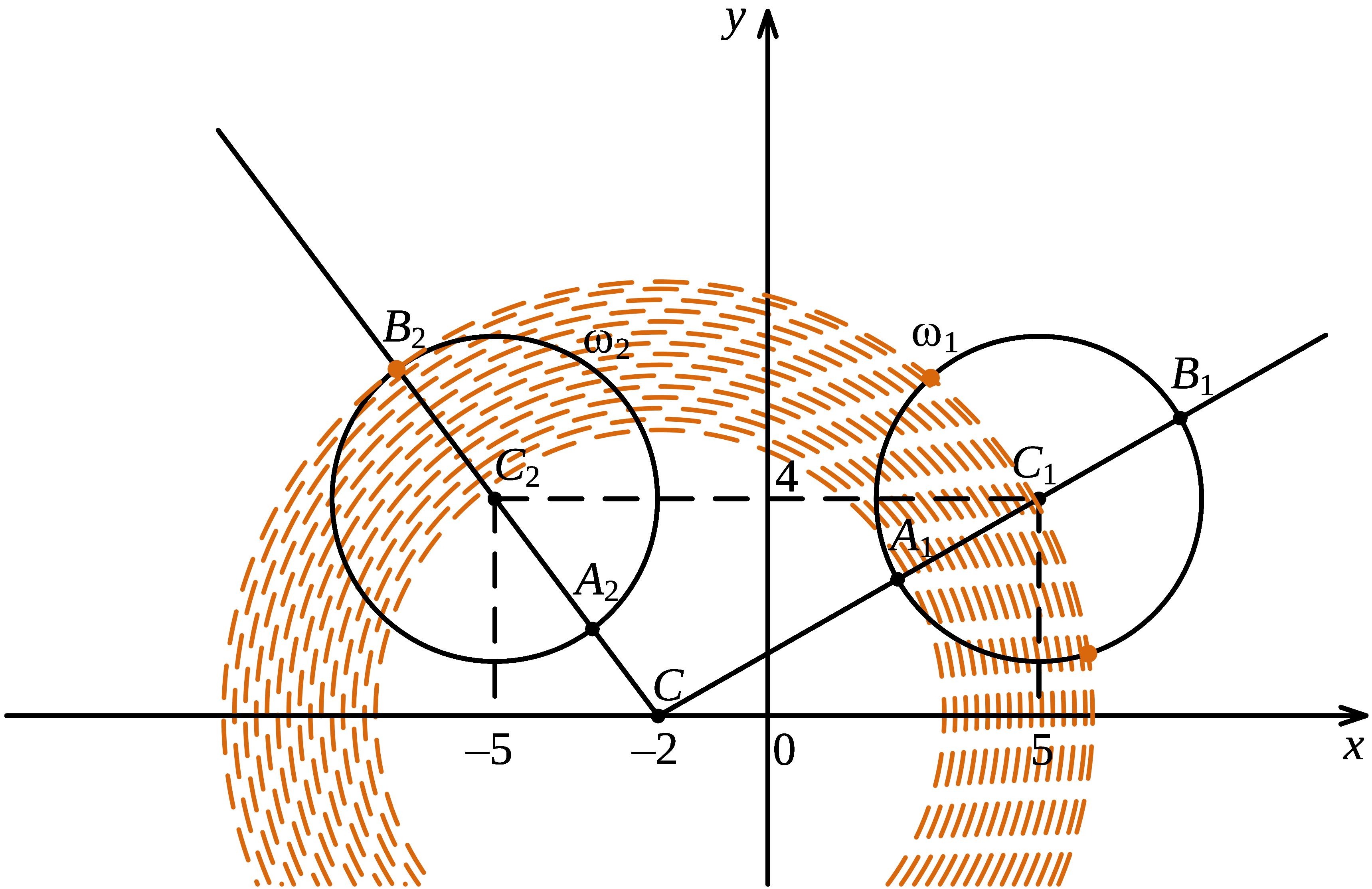


ОБЪЕДИНЕННАЯ
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
дрофа
вентана граф

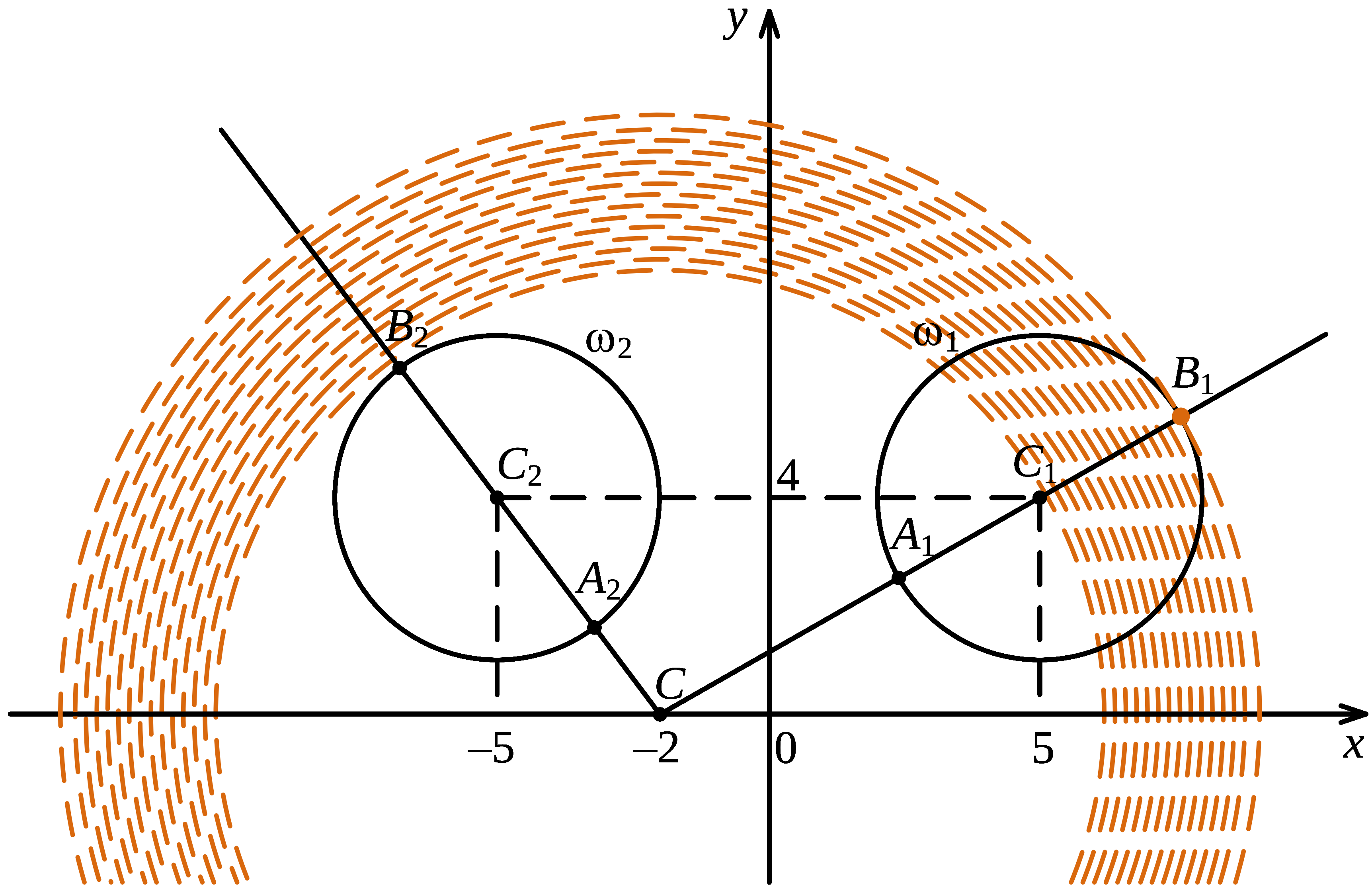
$$2 \le a \le \sqrt{65} - 3$$



$$\sqrt{65}-3 \le a \le 8$$



$8 \le a \le \sqrt{65}+3$



Ответ: $a = 2$ или $a = \sqrt{65} + 3.$

ОБЪЕДИНЕННАЯ
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА

Гомотетия

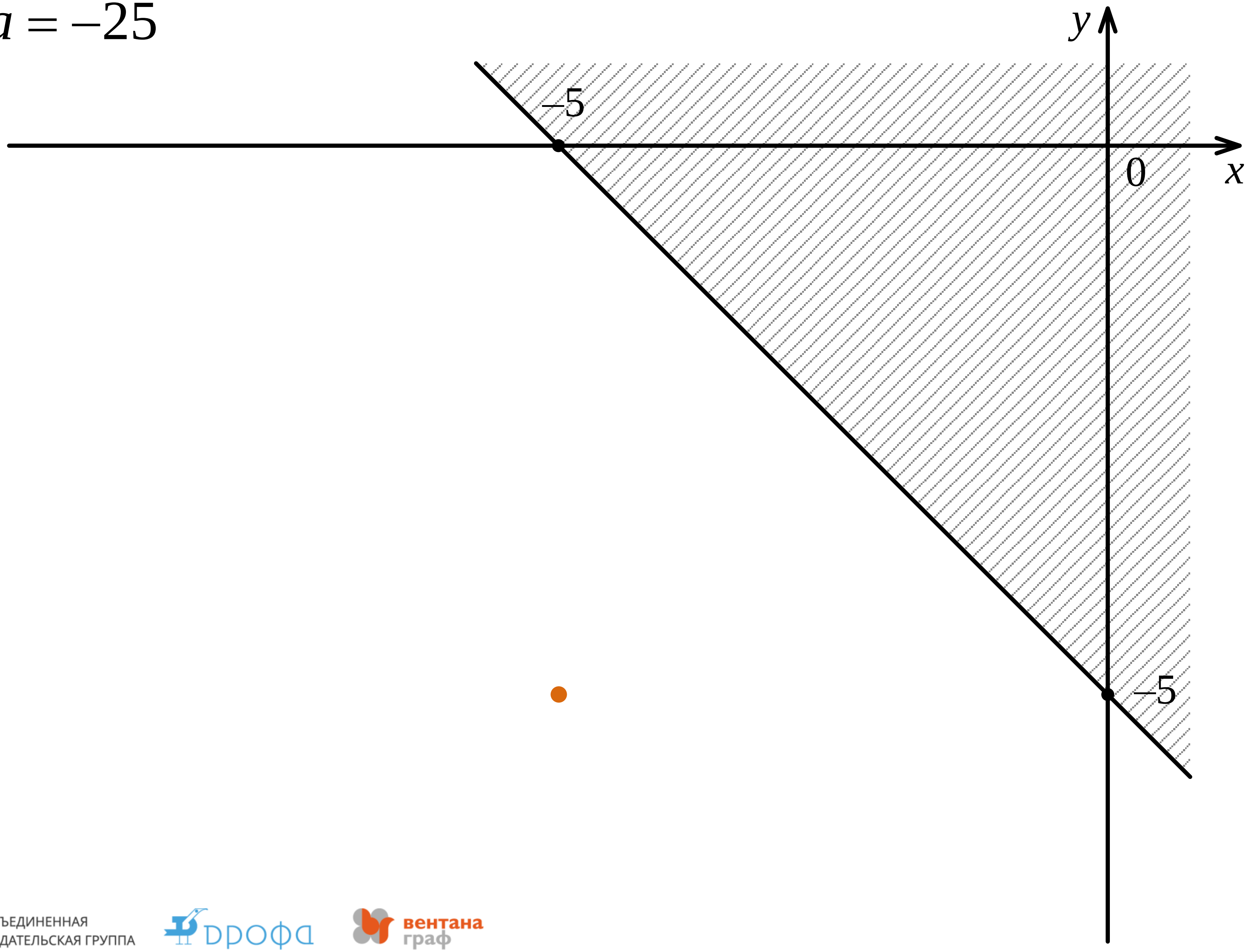
Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2xy+a} = x+y+5$ не имеет решений.

Запишем систему, равносильную данному уравнению:

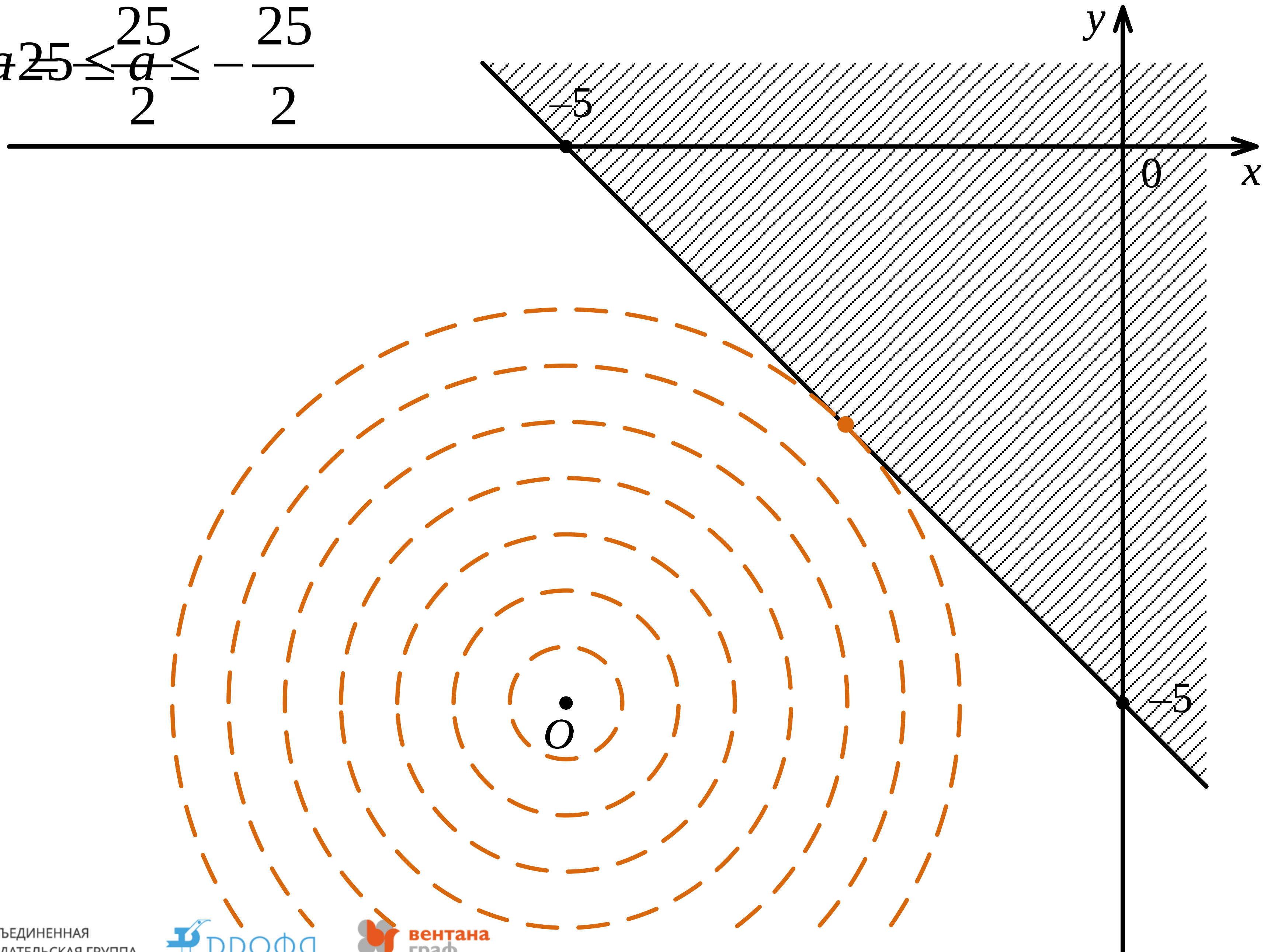
$$\begin{cases} x+y+5\geq 0, \\ 2xy+a=(x+y+5)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5\geq 0, \\ (x+5)^2+(y+5)^2=a+25. \end{cases}$$

$a = -25$



$-\frac{25}{2} \le a \le -\frac{25}{2}$



Ответ: $a < -\dfrac{25}{2}$.

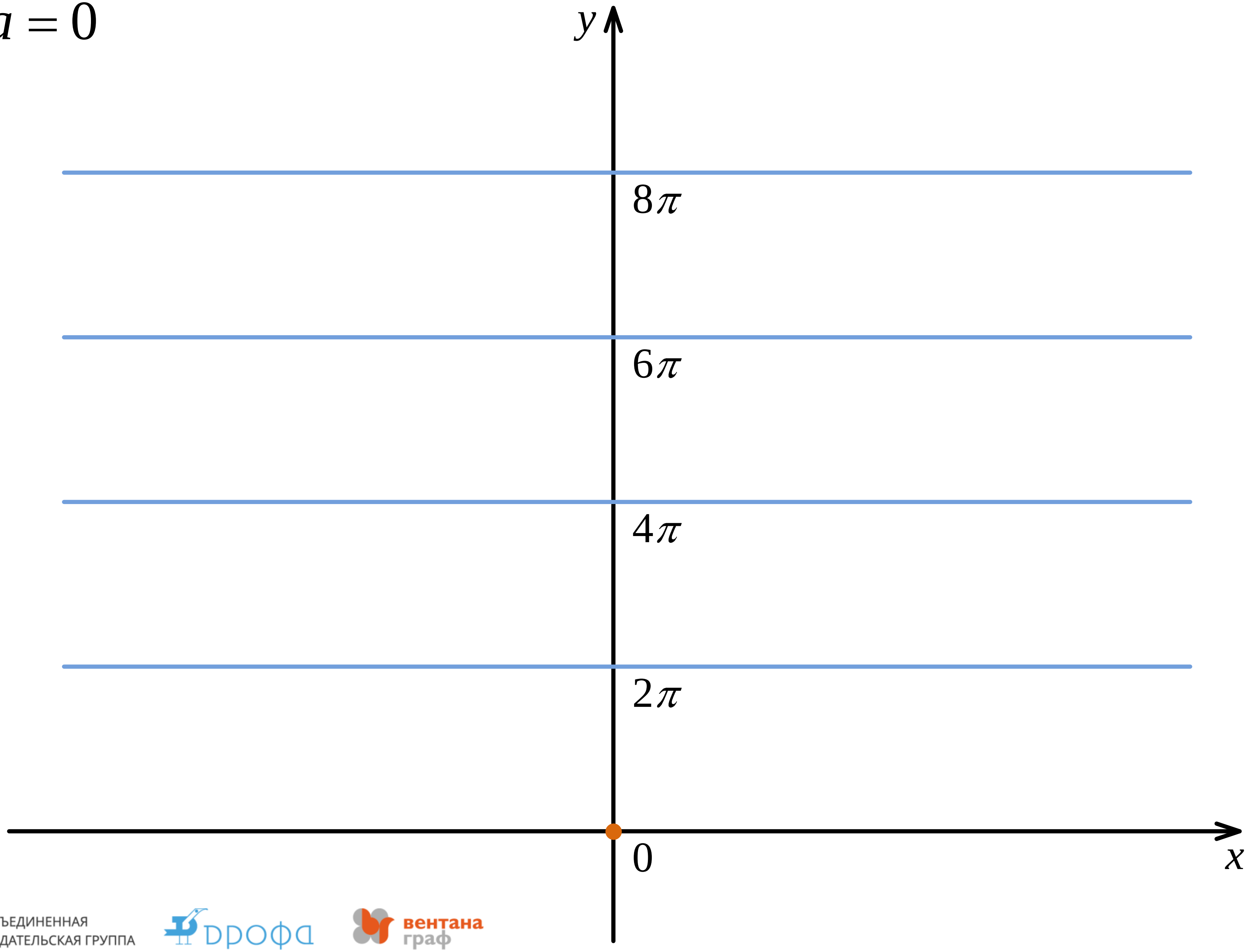
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$ имеет ровно восемь решений.

Имеем:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi k, \text{ где } k \in \mathrm{Z}.$$

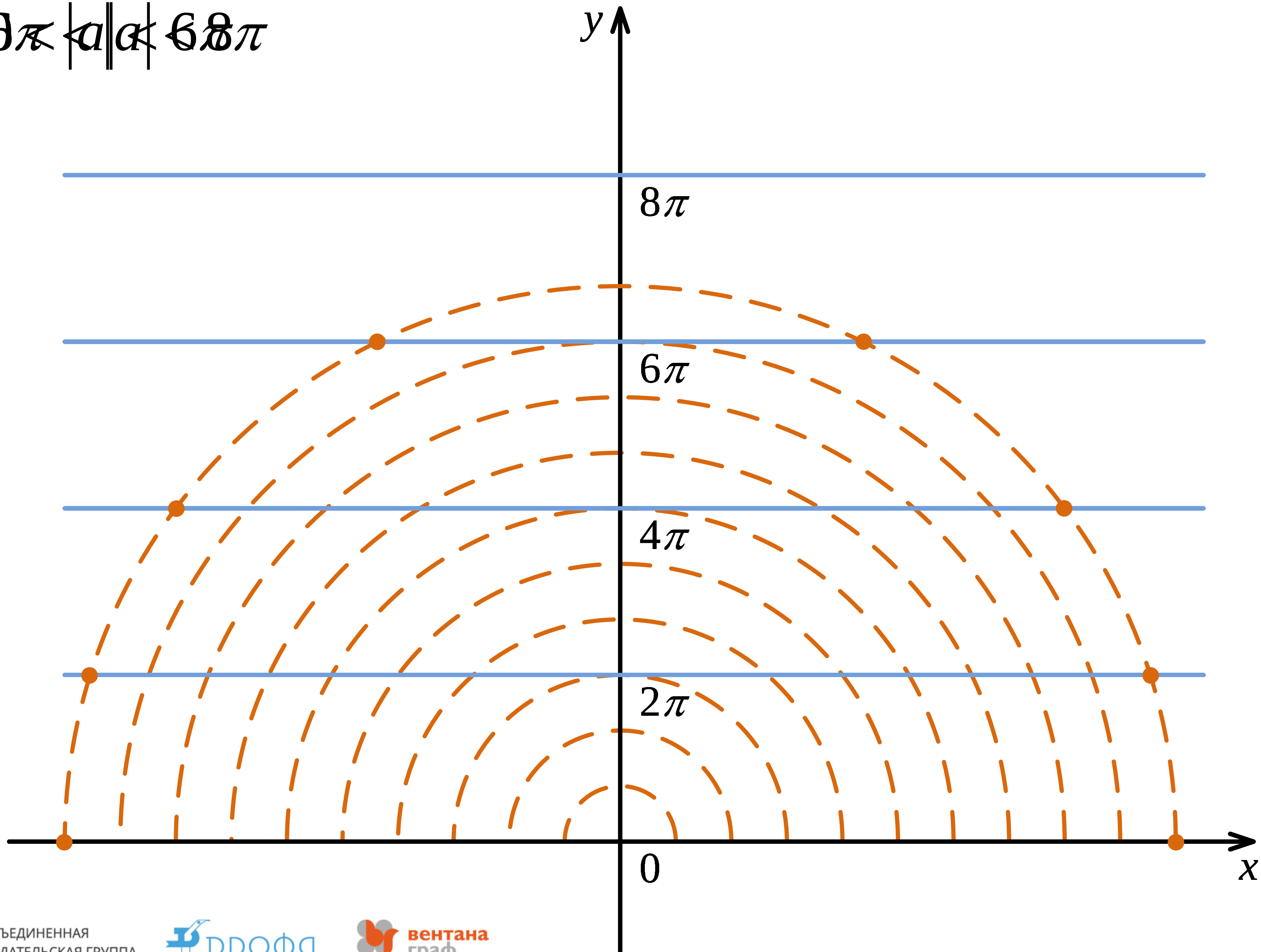
Рассмотрим функции $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ — семейство гомотетичных полуокружностей с центром в точке (0; 0), и $y = 2\pi k$ — семейство прямых, параллельных оси абсцисс.

$a = 0$



$0 < |a| < 8\pi$

$6\pi < |a| < 8\pi$



Ответ: $-8\pi < a < -6\pi$ или $6\pi < a < 8\pi$.

ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА

Параллельный перенос

Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x = a + \sqrt{y}, \\ y^2 - x^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет решения.

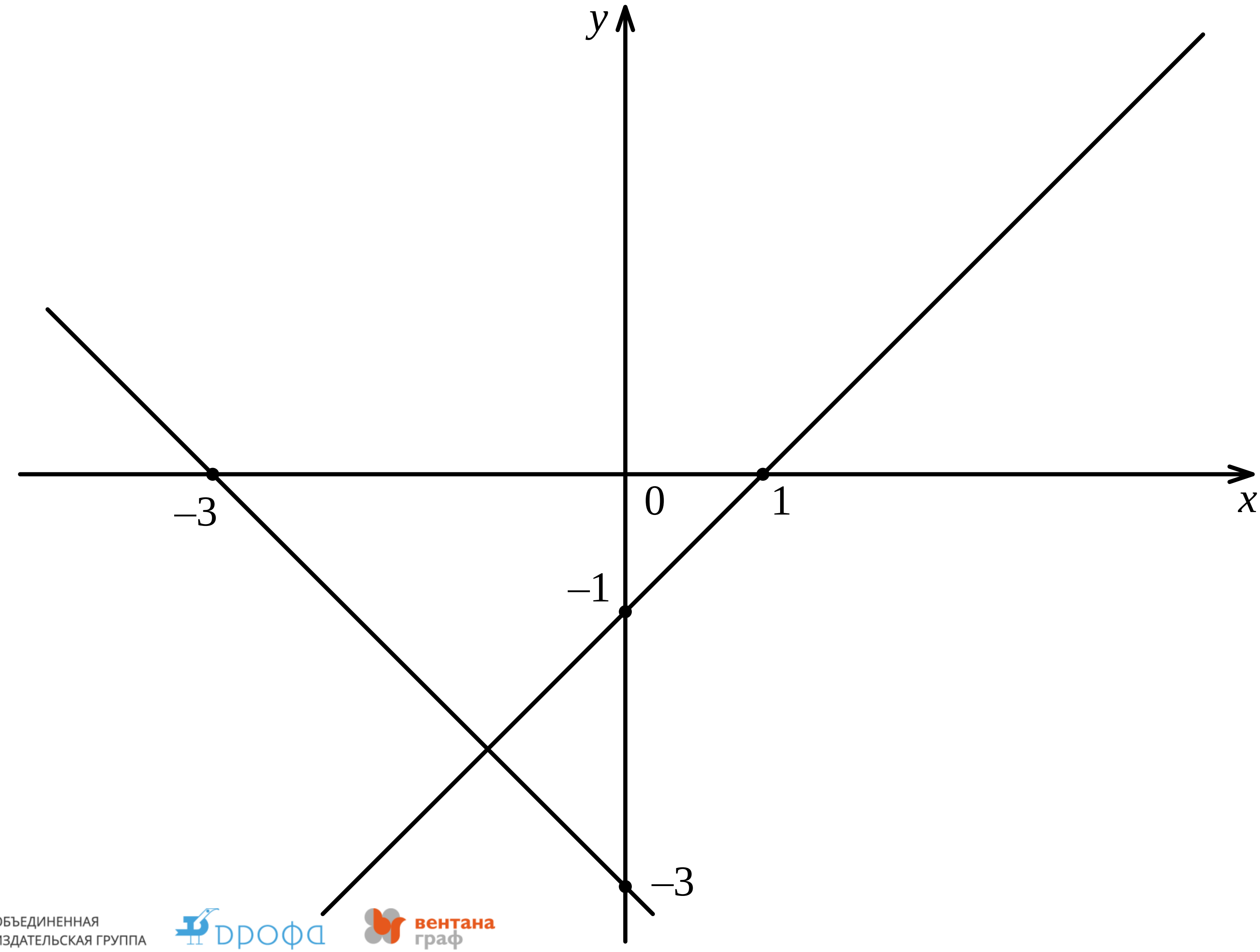
Из первого уравнения $y=(x-a)^2$, если $x \geq a$. Это уравнение задает семейство «полупарабол» — правых веток парабол $y=(x-a)^2$, «скользящих» вершинами по оси абсцисс.

Левая часть второго уравнения раскладывается на множители:

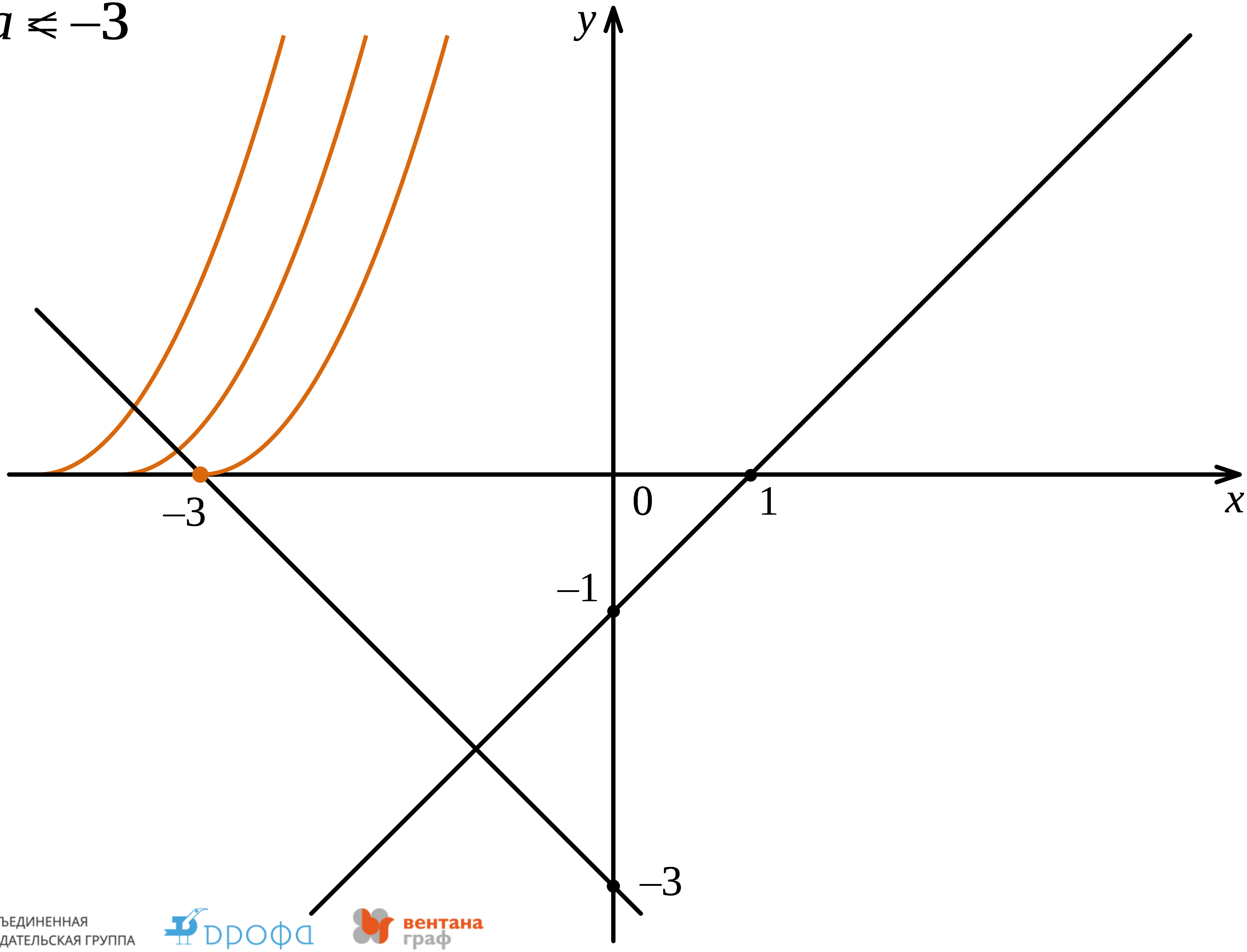
$$y^2-x^2-2x+4y+3=(y^2+4y+4)-(x^2+2x+1)=$$

$$=(y+2)^2-(x+1)^2=(y+x+3)(y-x+1).$$

График второго уравнения — объединение прямых $y=-x-3$ и $y=x-1$.

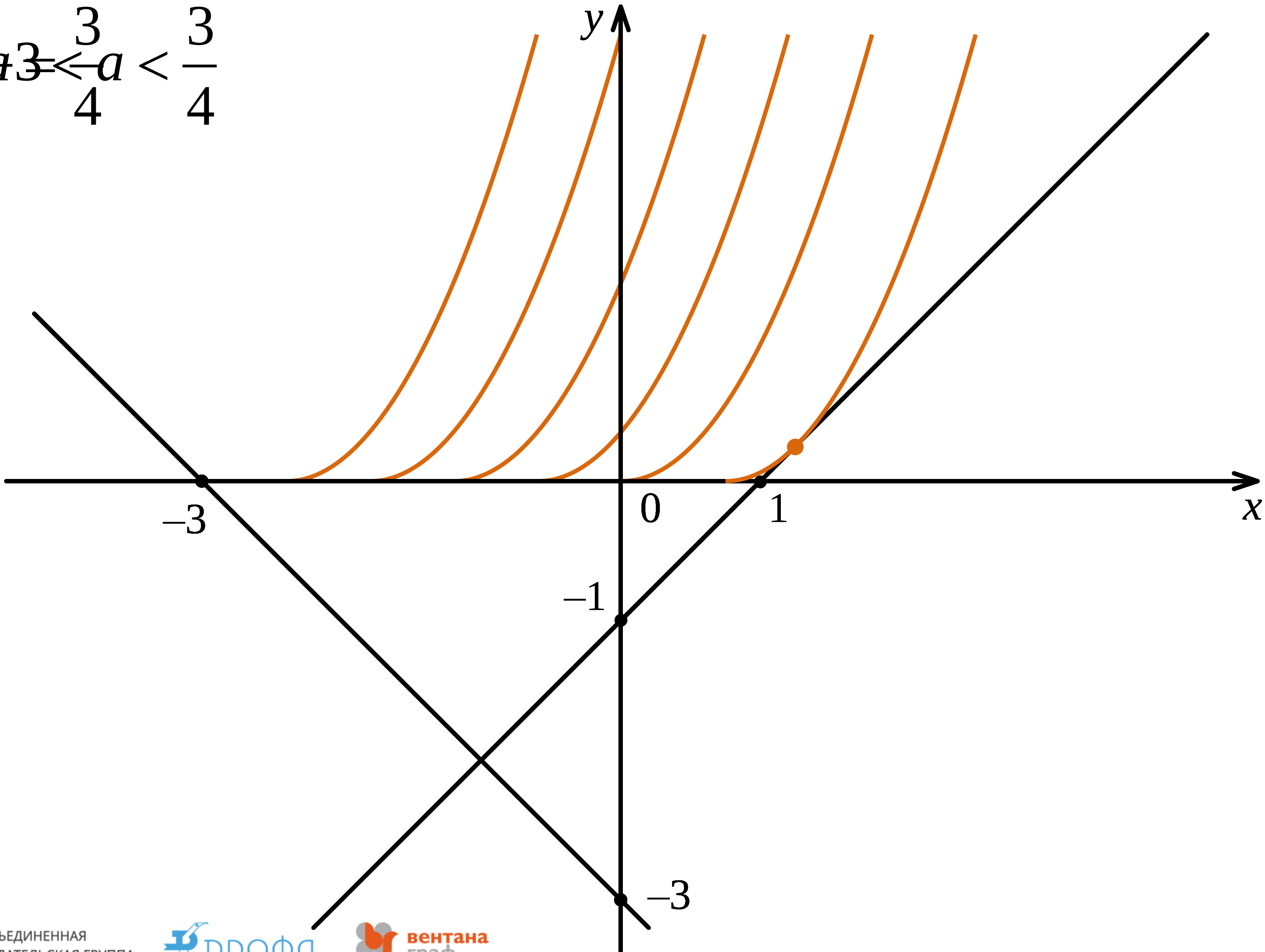

y
x
0
1
–3
–1
–3

$a \leqslant -3$

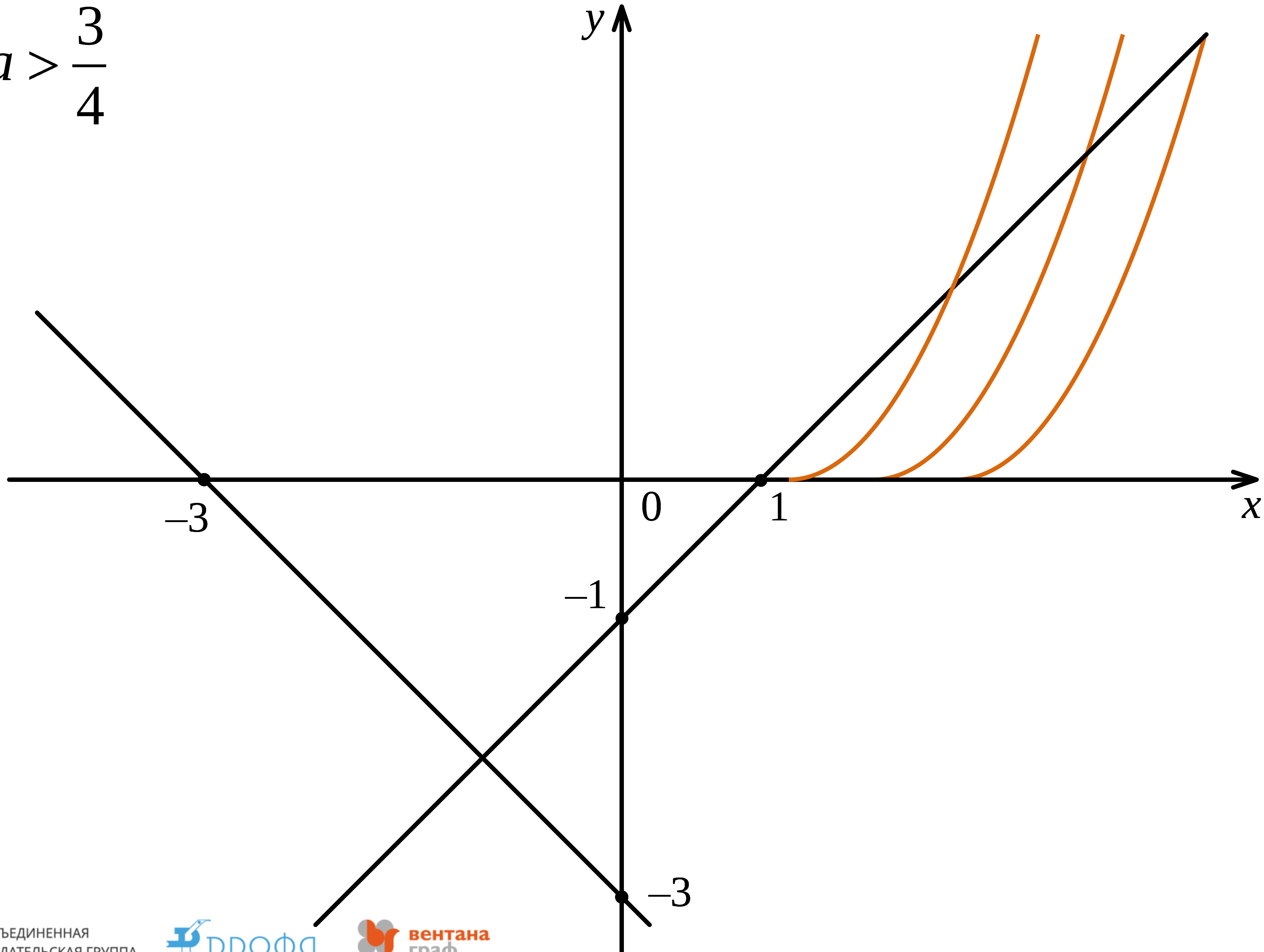


$a = \frac{3}{4}$

$-3 < a < \frac{3}{4}$



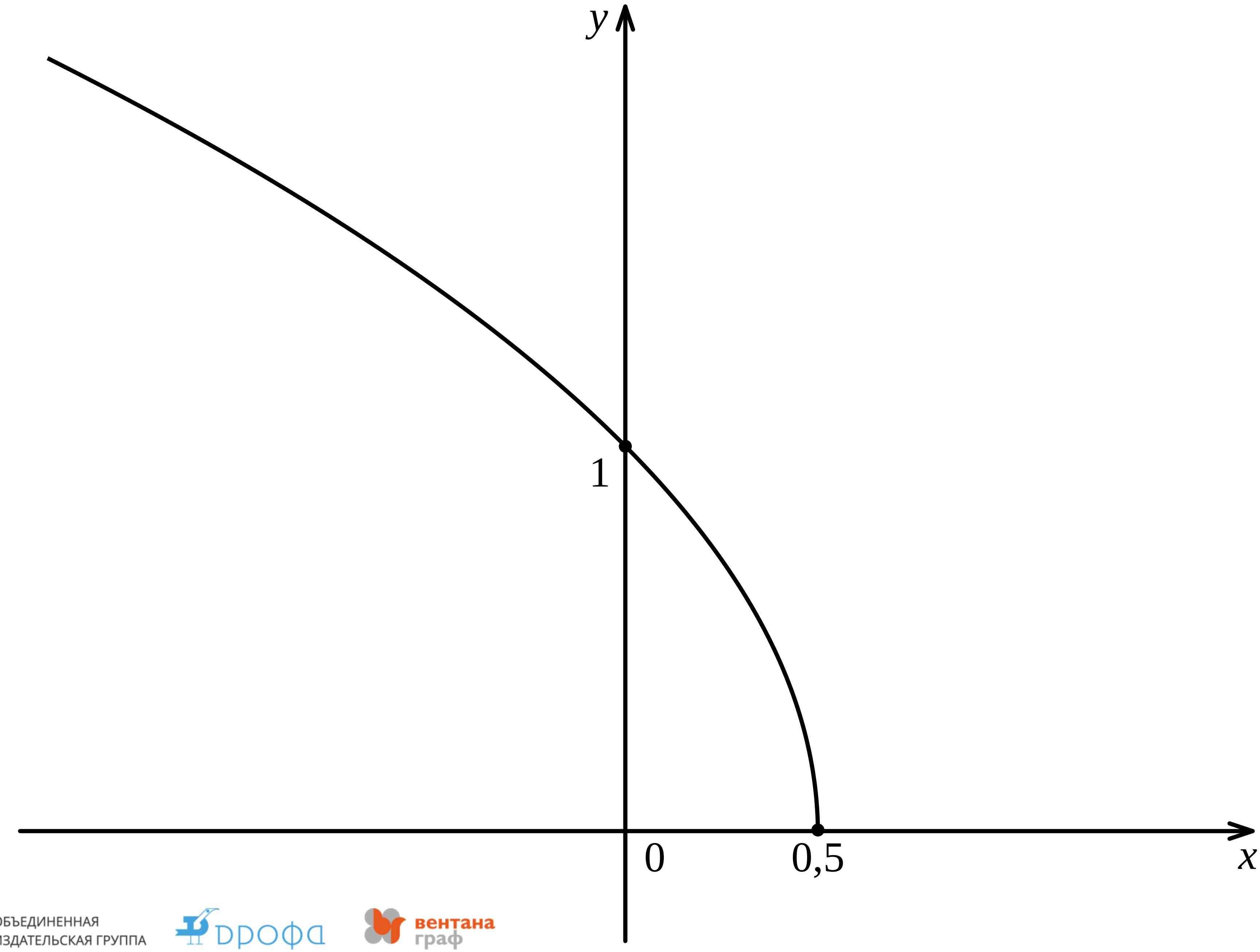
$a > \dfrac{3}{4}$



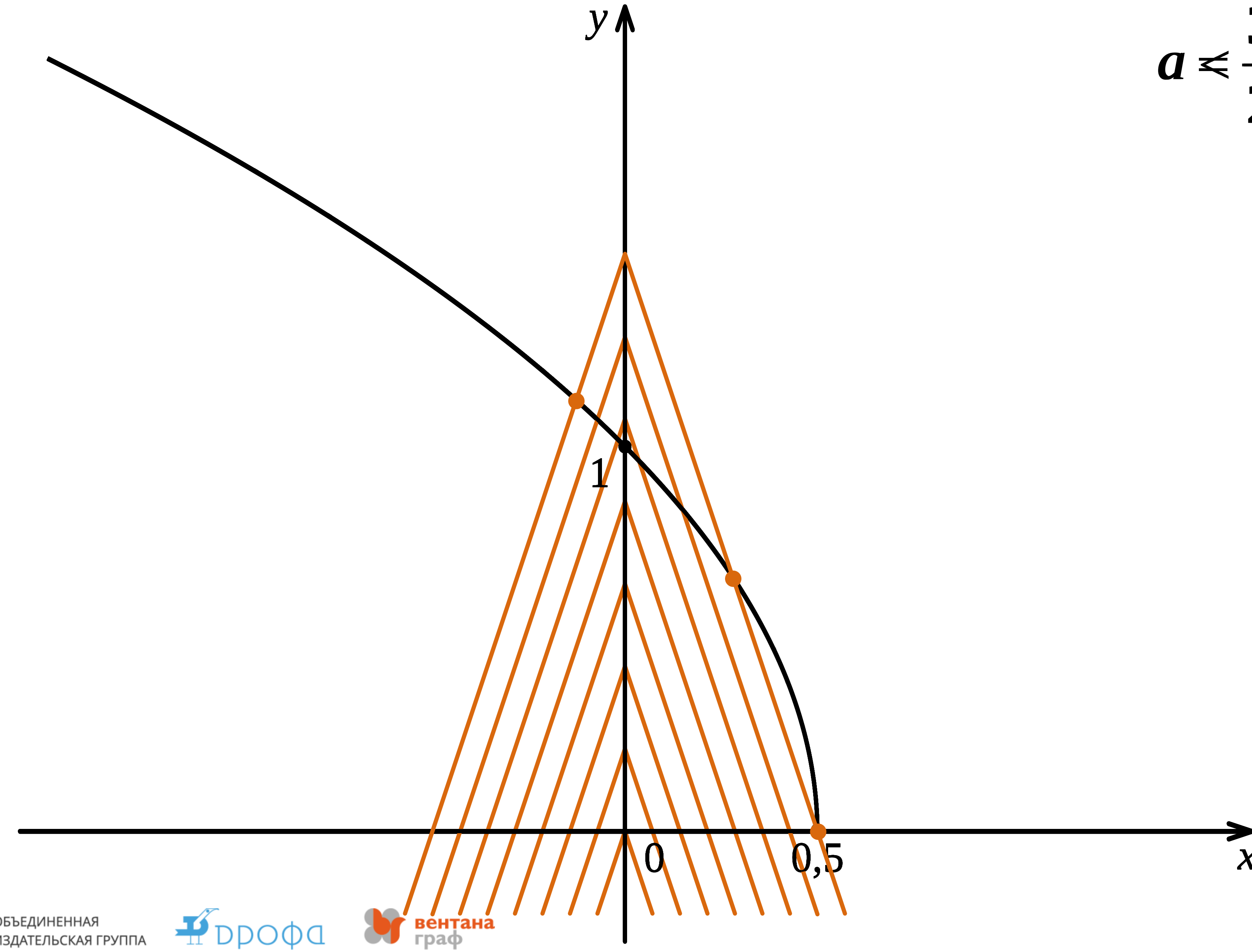
ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
дрофа
вентана граф

Ответ: $a \leq -3$ или $a \geq \dfrac{3}{4}$.

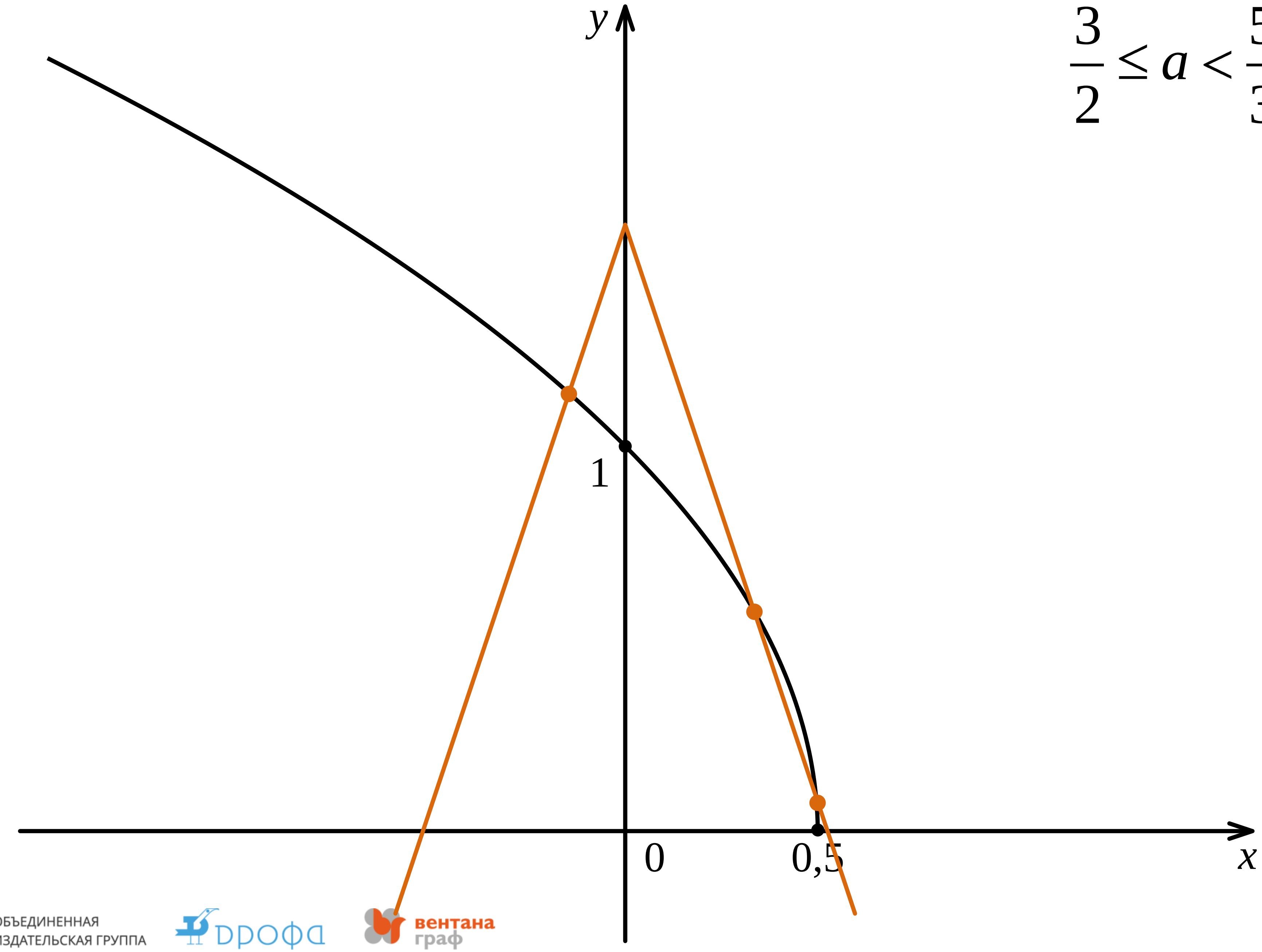
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{1-2x}=a-3|x|$ имеет более двух корней.


y
1
0
0,5
x

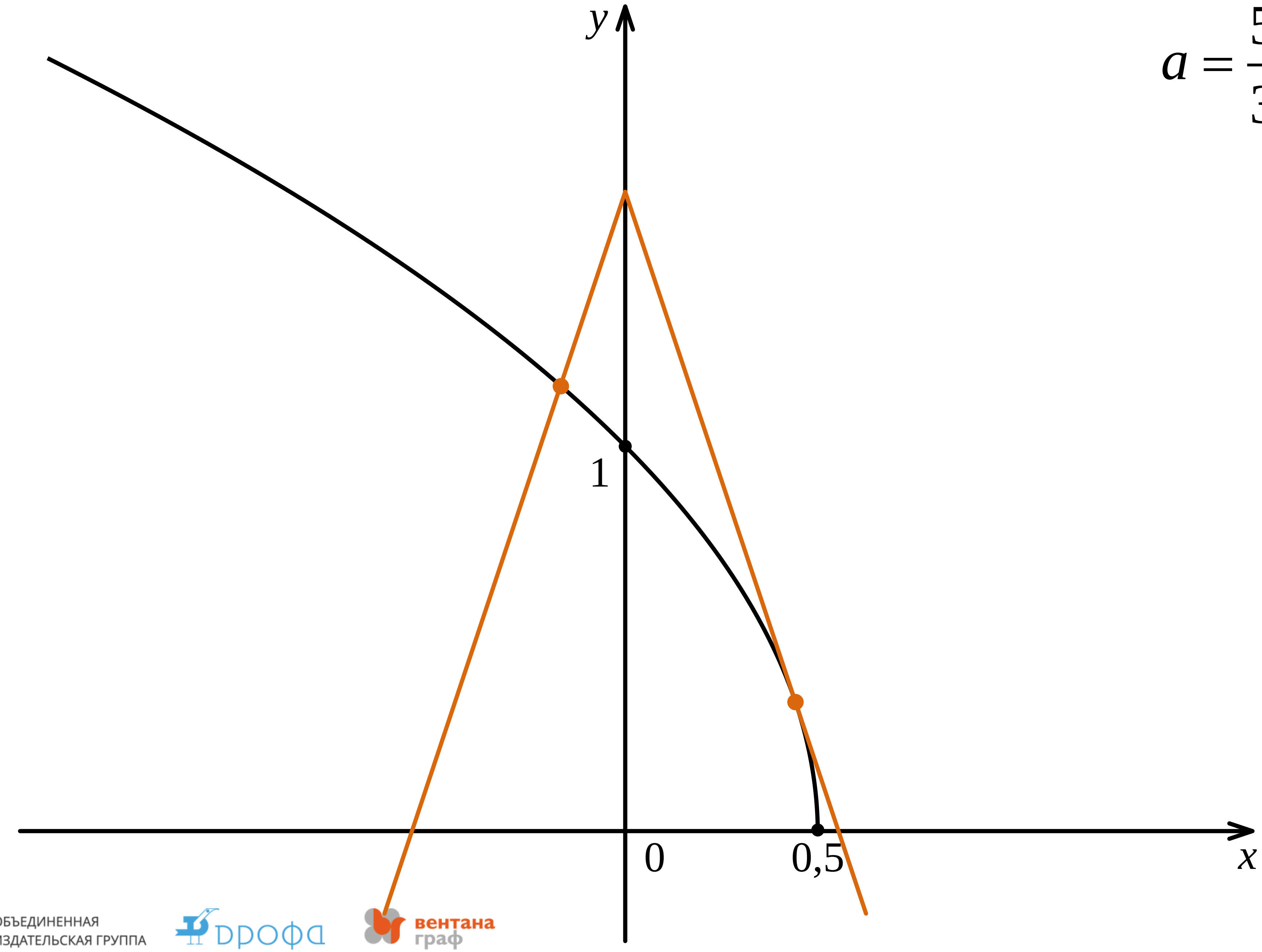
$$a \leqslant \frac{3}{2}$$



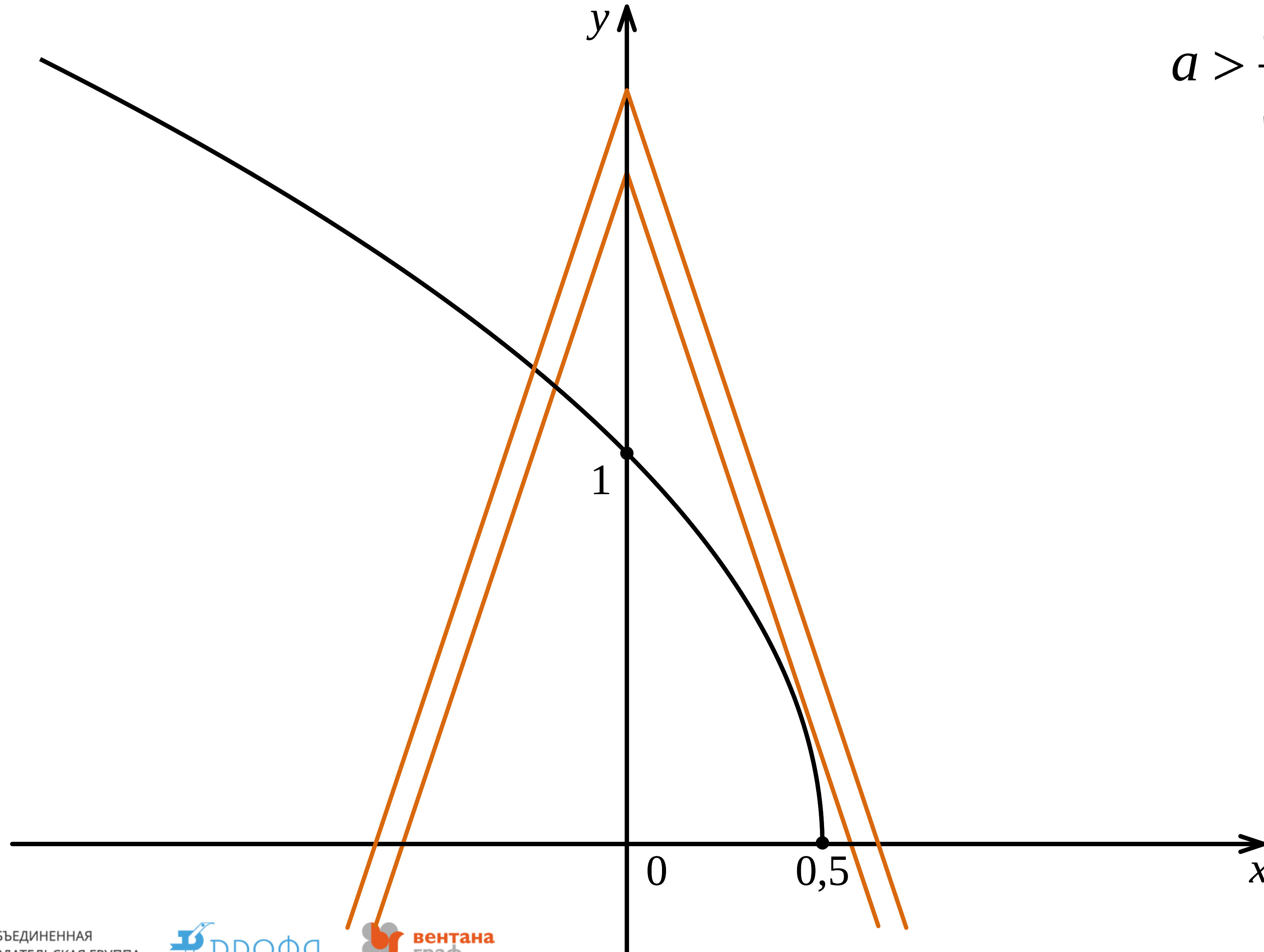
$$\frac{3}{2} \le a < \frac{5}{3}$$



$$a = \frac{5}{3}$$



$$a > \frac{5}{3}$$

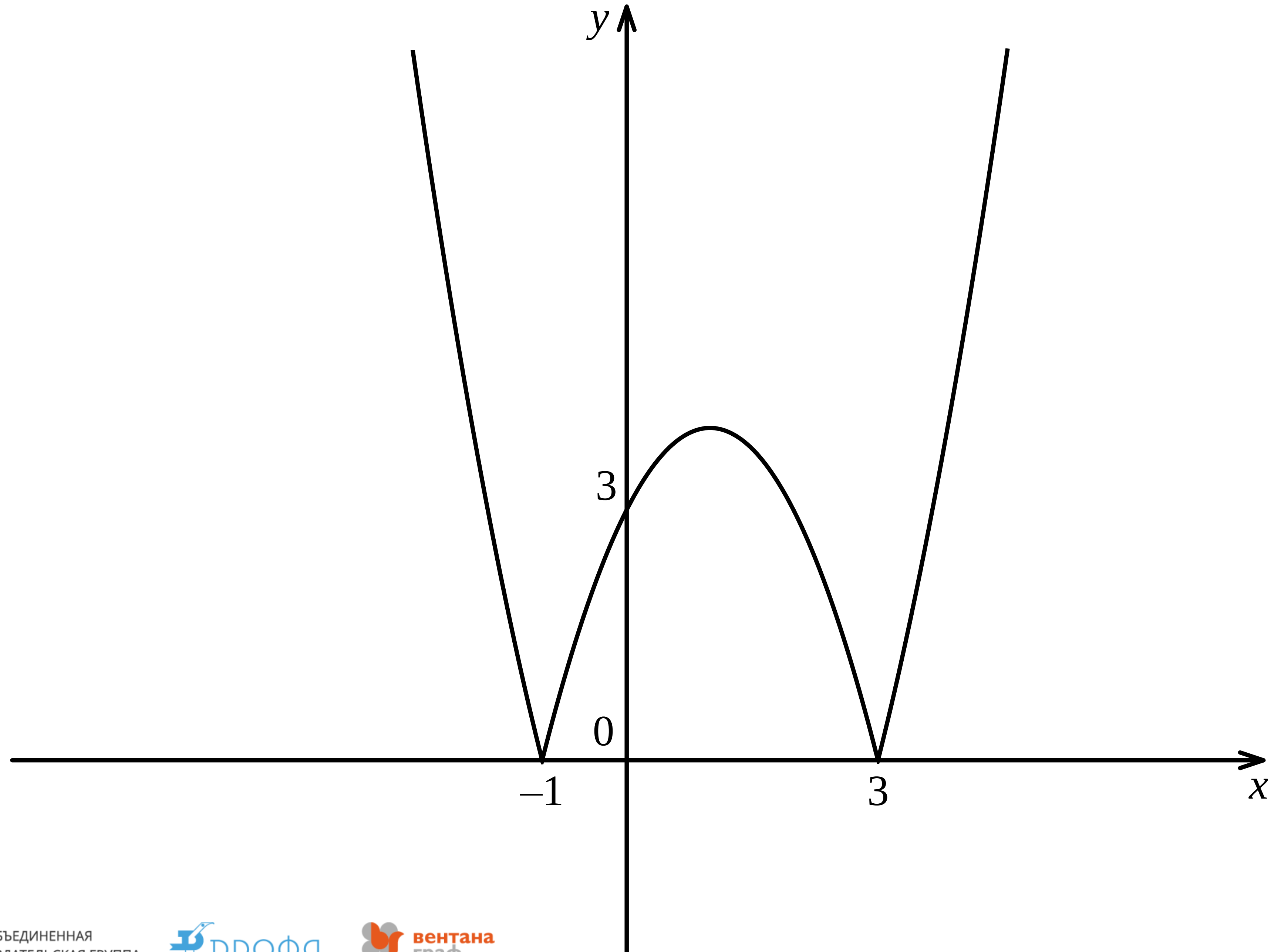


Ответ: $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{3}$.

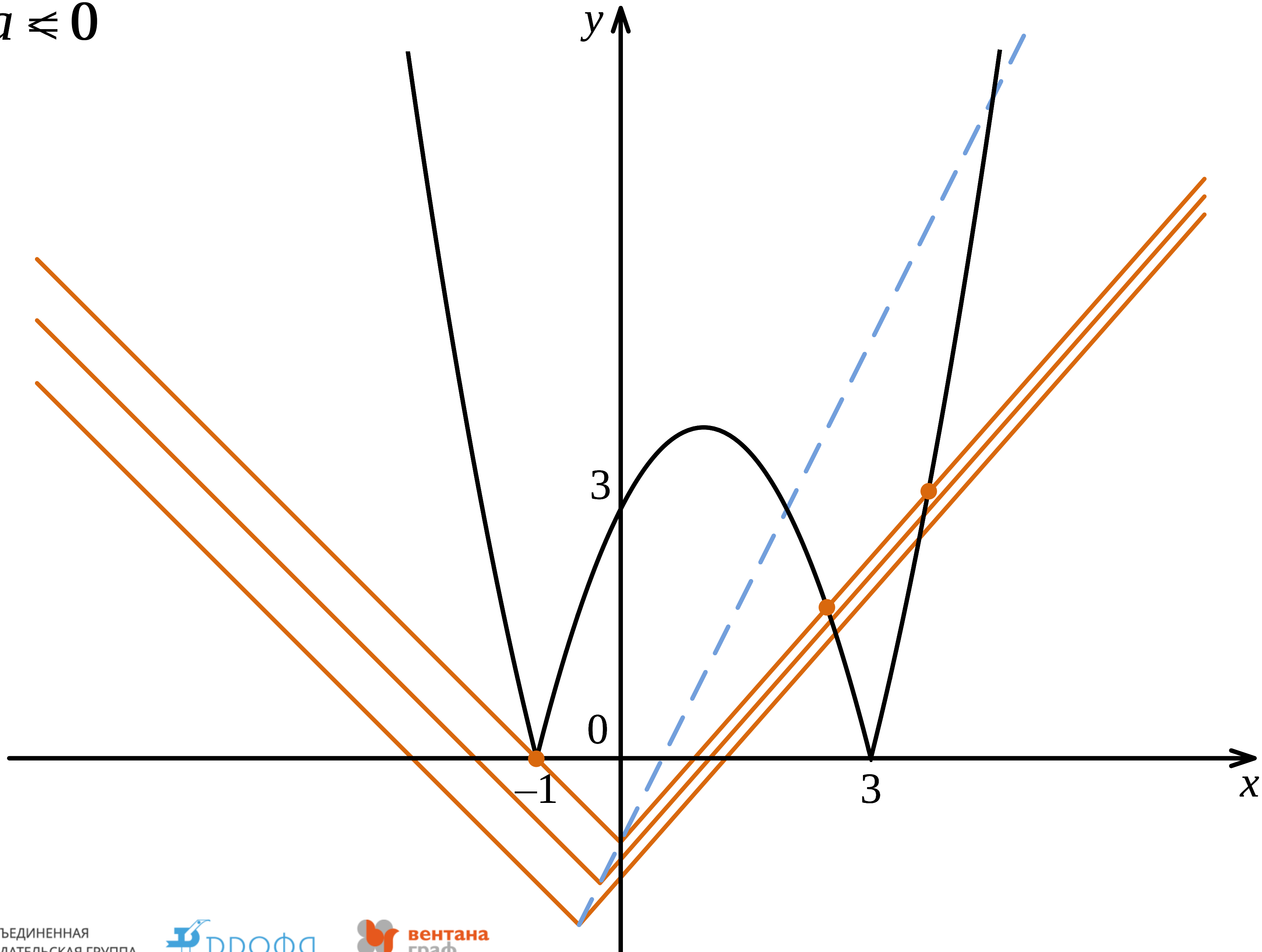
При каких значениях параметра a уравнение

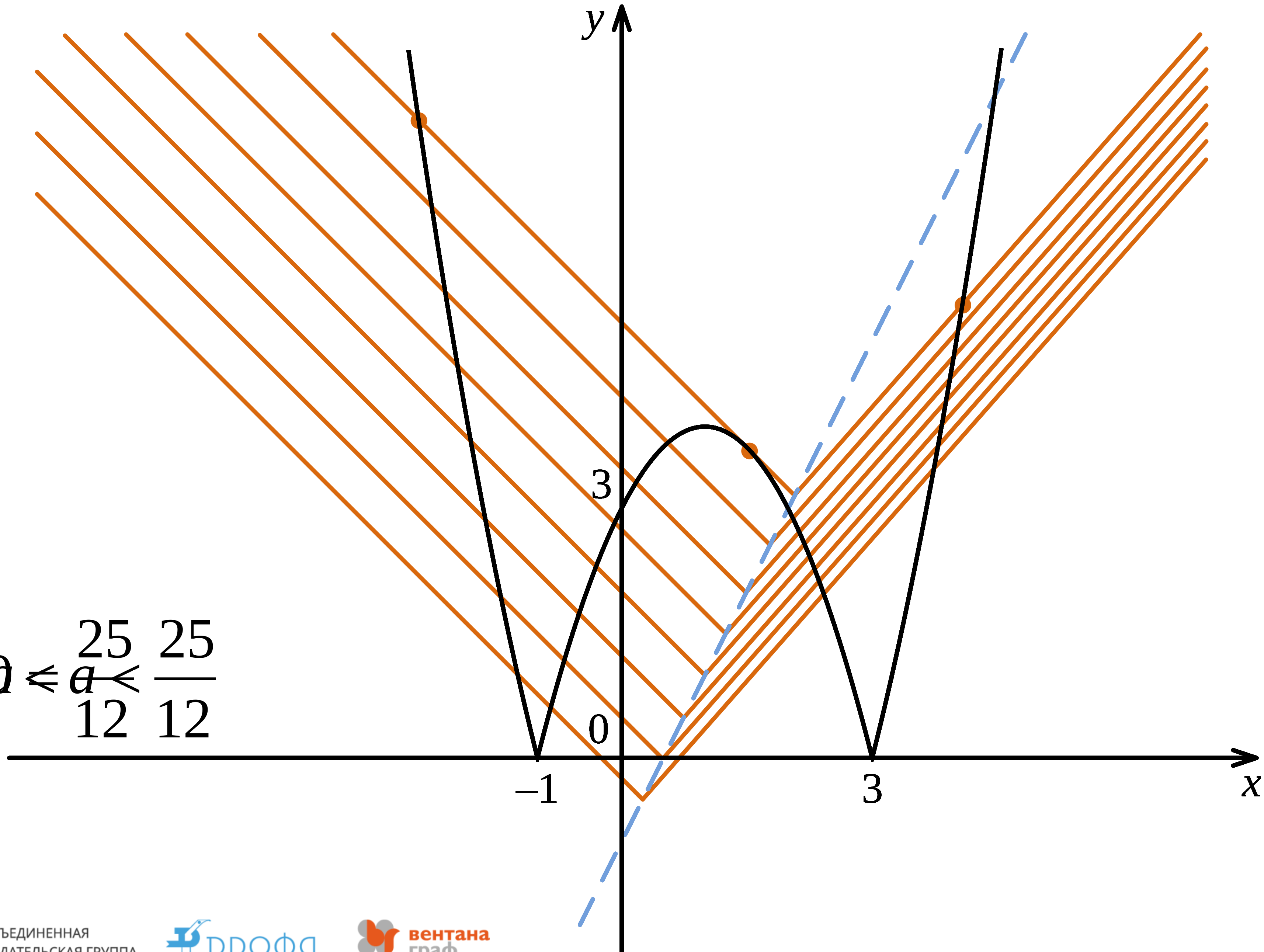
$$\left|x^2-2x-3\right|-2a=\left|x-a\right|-1$$

имеет ровно три корня?


y
3
0
–1
3
x

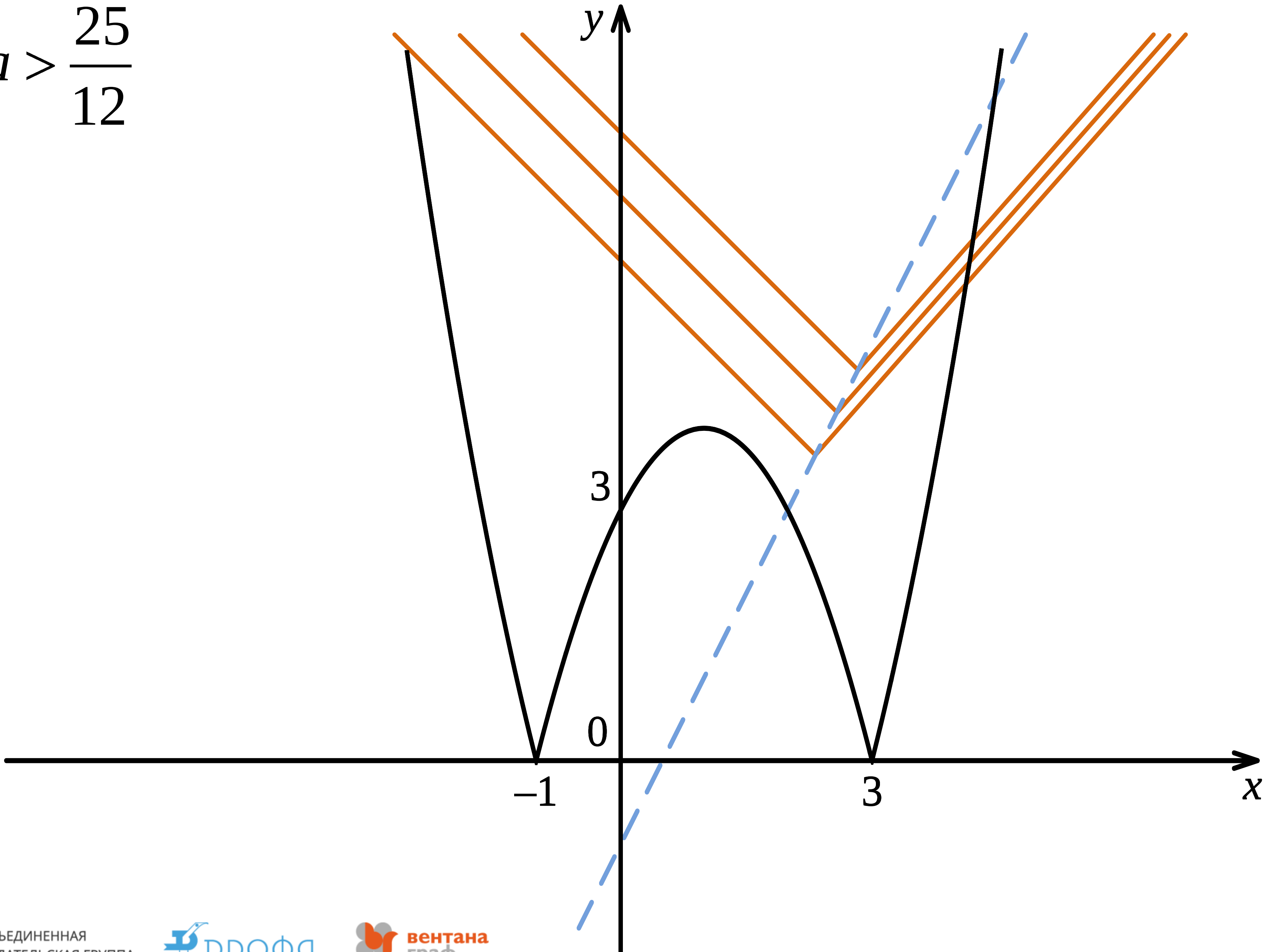
$a \leqslant 0$





$0 < a < \frac{25}{12}$

$$a > \frac{25}{12}$$

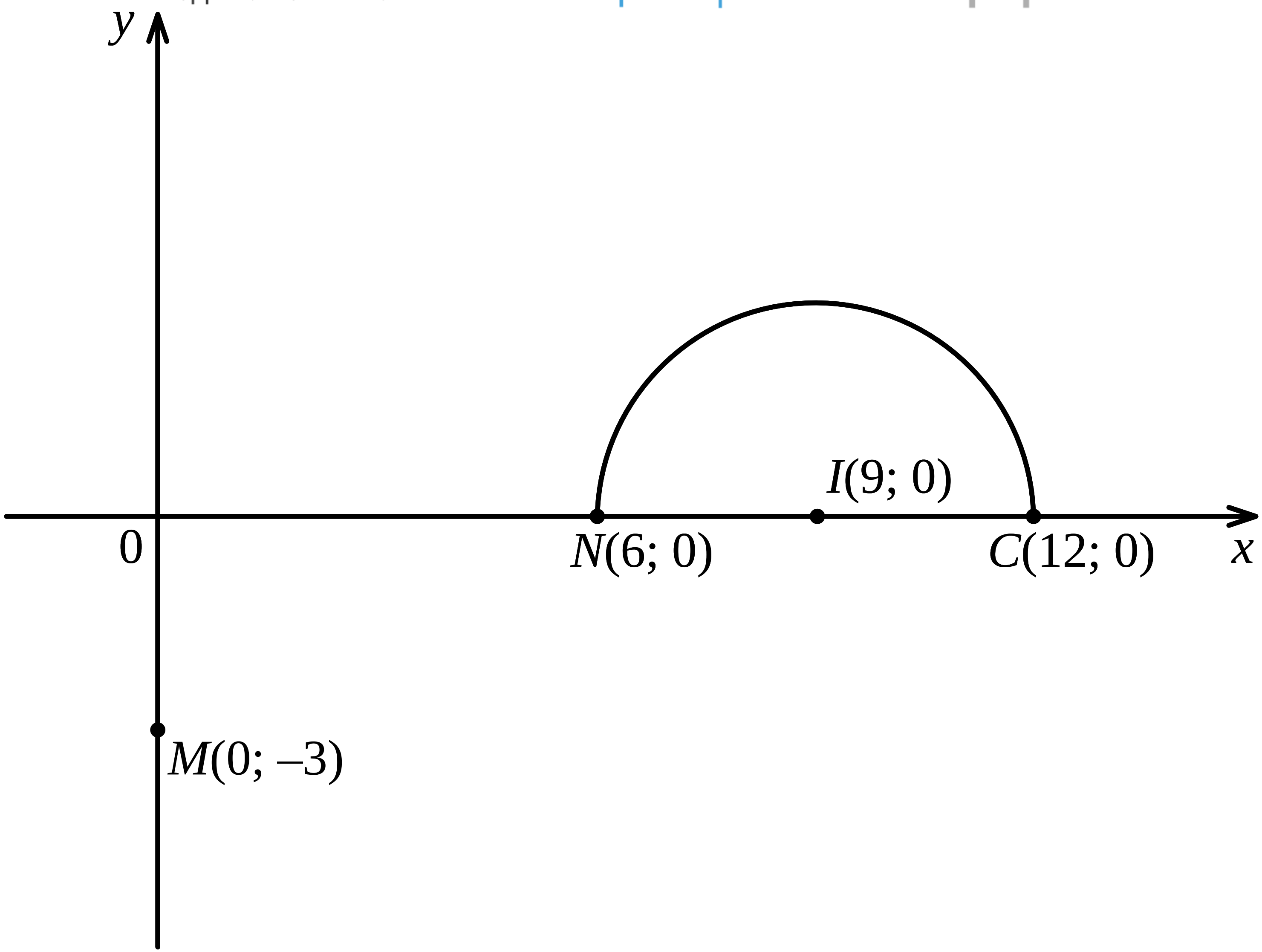


Ответ: $a = 0$ или $a = \dfrac{25}{12}$.

Поворот

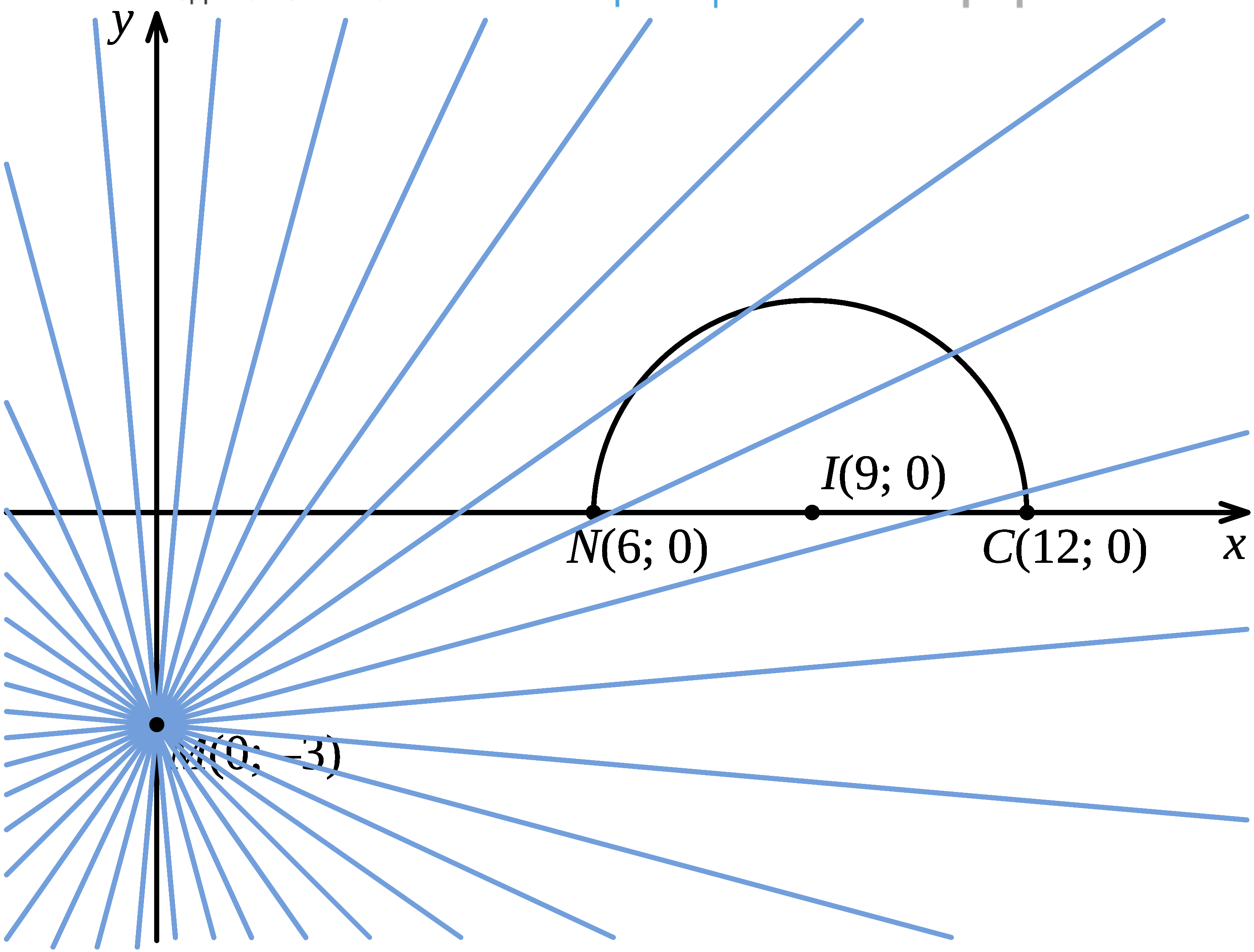
ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА дрофа вентана граф

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax-3=\sqrt{-x^2+18x-72}$ имеет единственное решение.



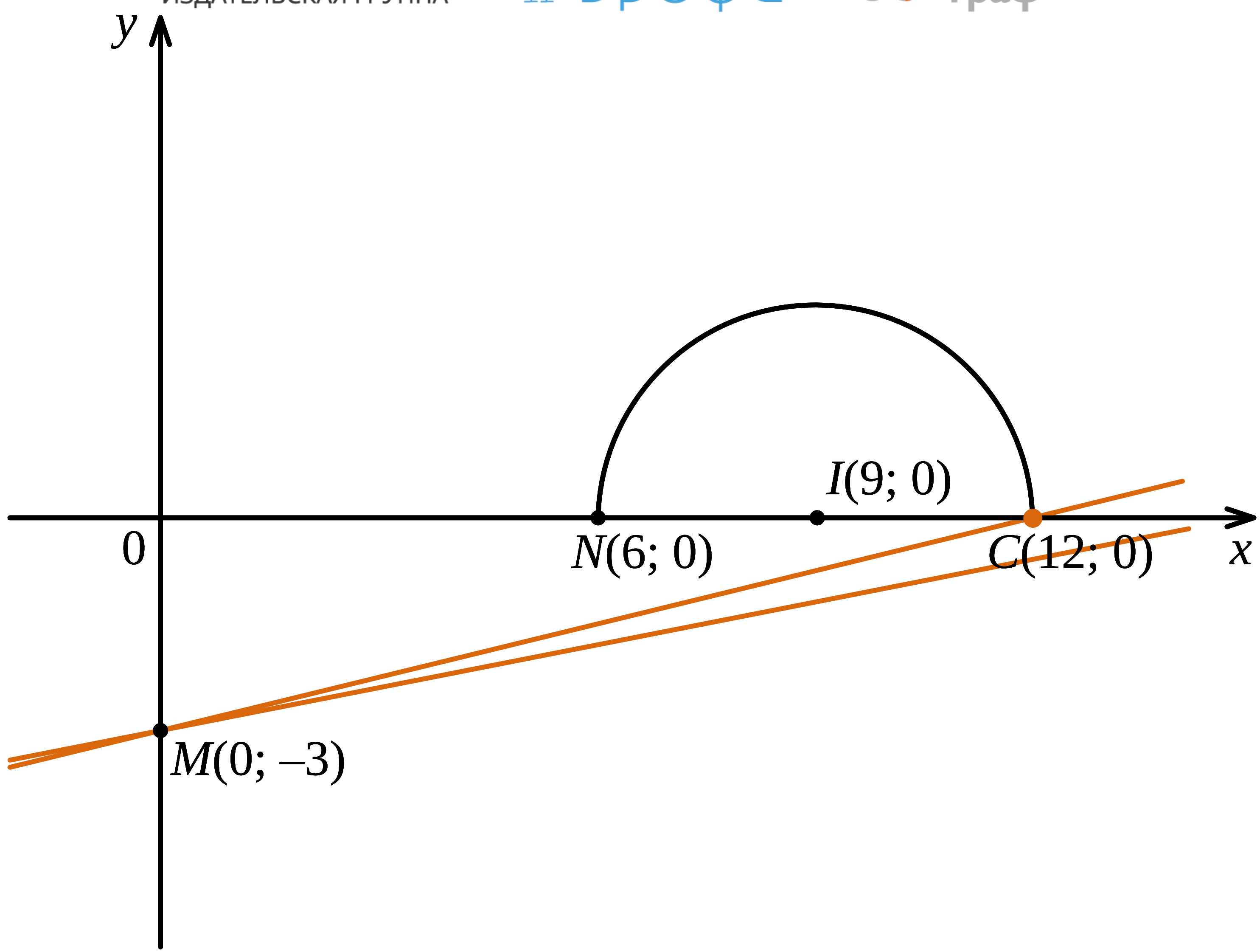
ОБЪЕДИНЕННАЯ
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
дрофа
вентана
граф

ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
дрофа
вентана граф

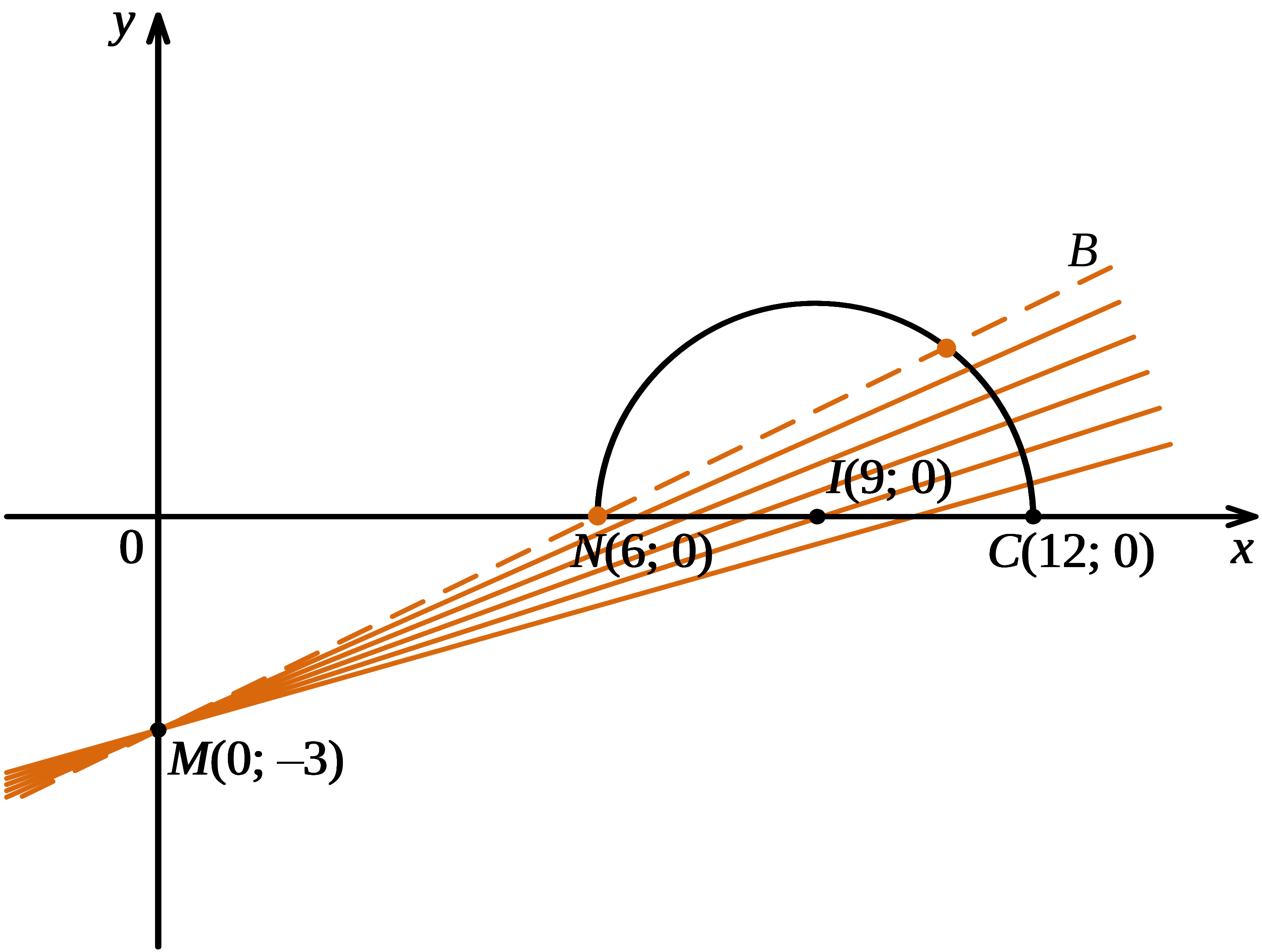


ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
дрофа
вентана граф

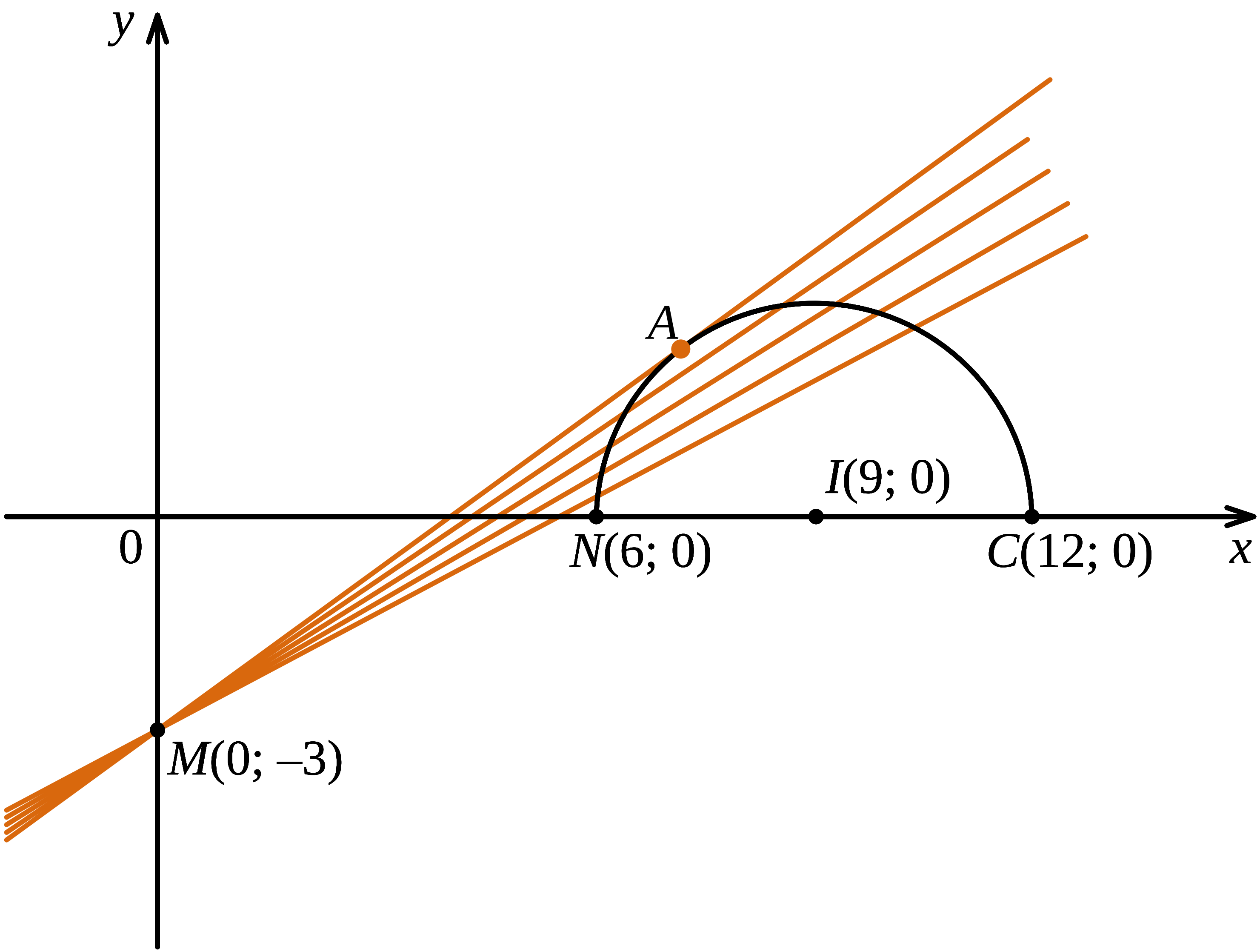
$a \leqslant 0,25$

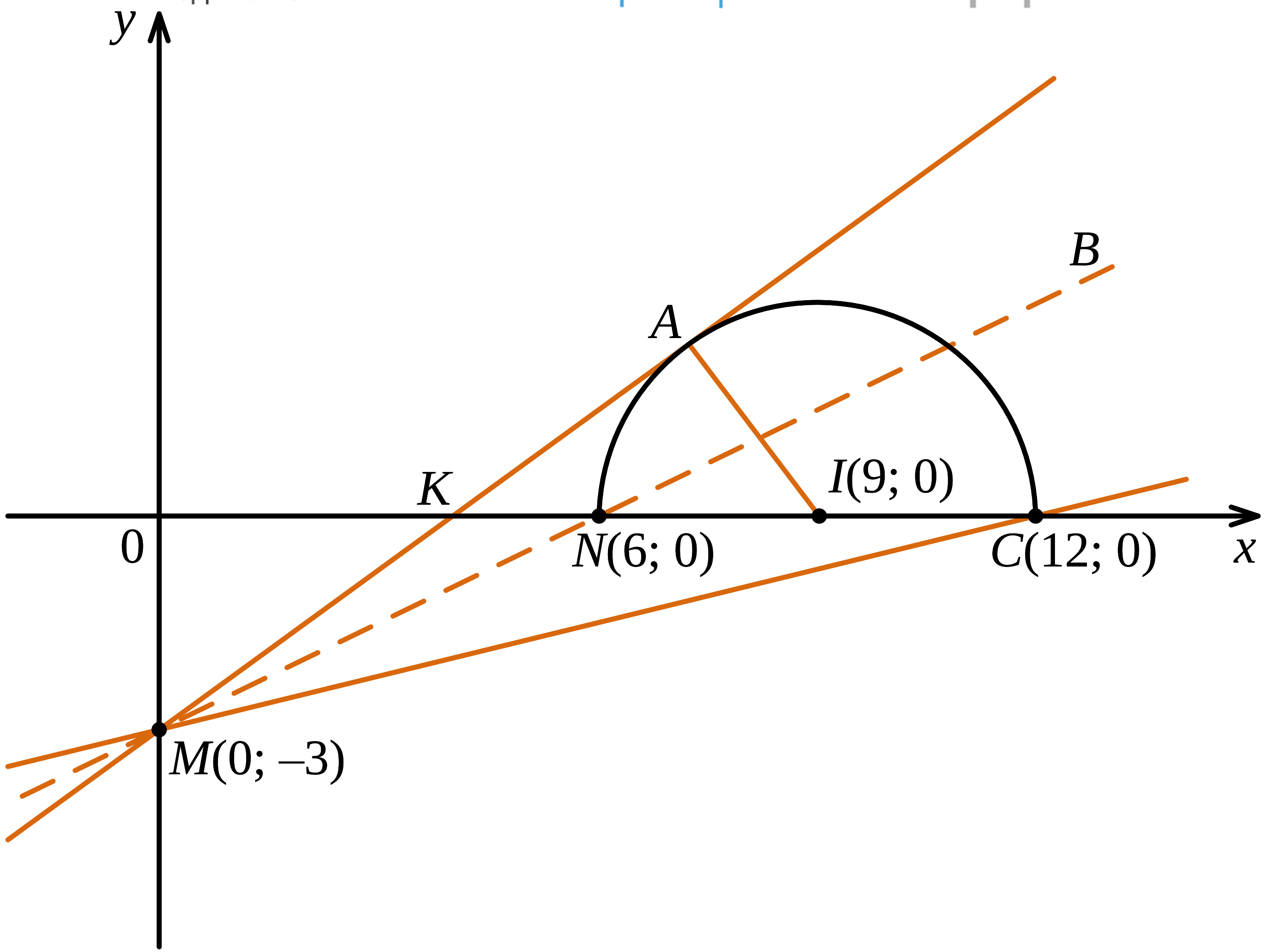


$$0,25 < a \leqslant 0,5$$



$$0,5 < a \leqslant 0,75$$





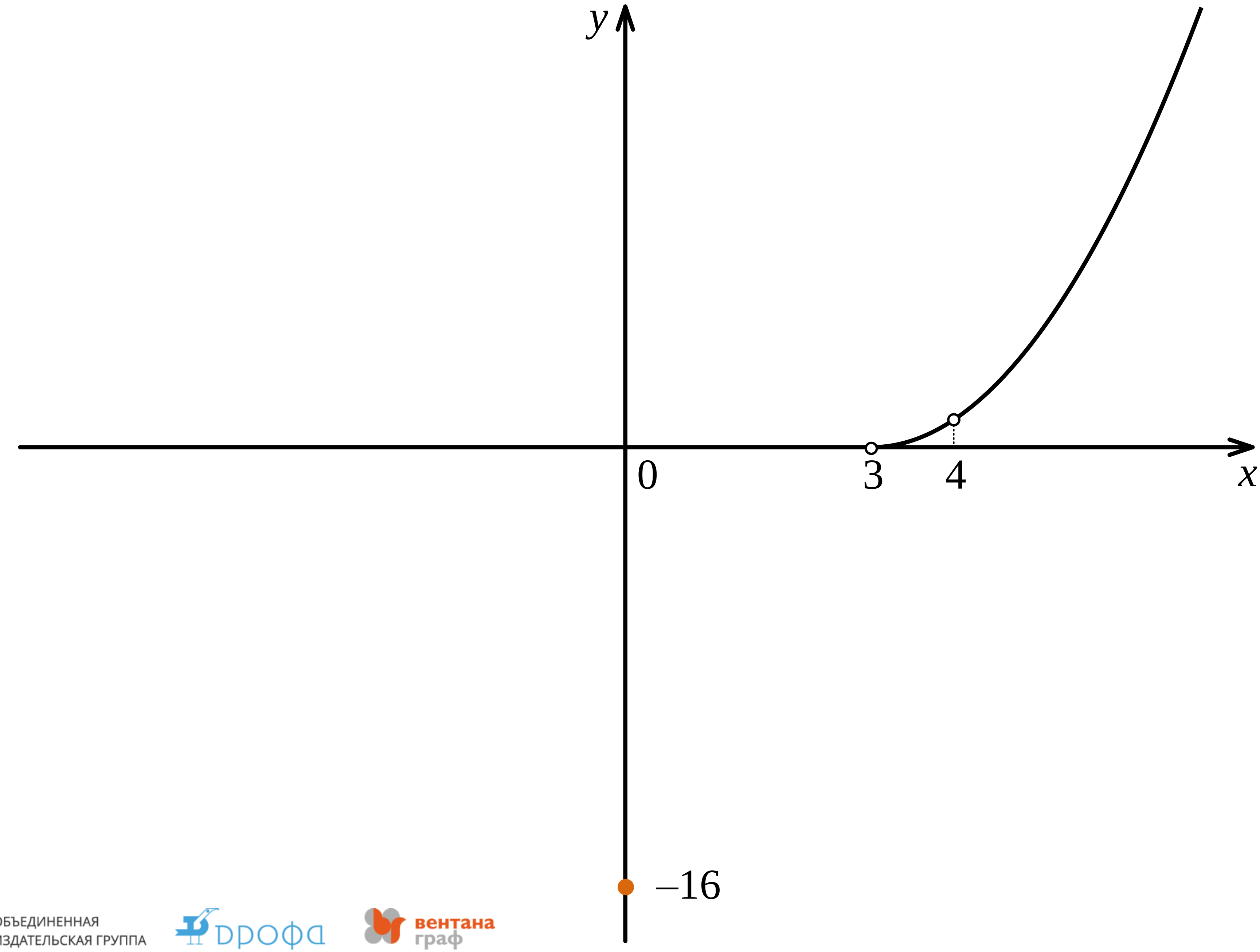
ОБЪЕДИНЕННАЯ
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
дрофа
вентана
граф

Ответ: $a \in [0,25;\ 0,5) \cup \{0,75\}$.

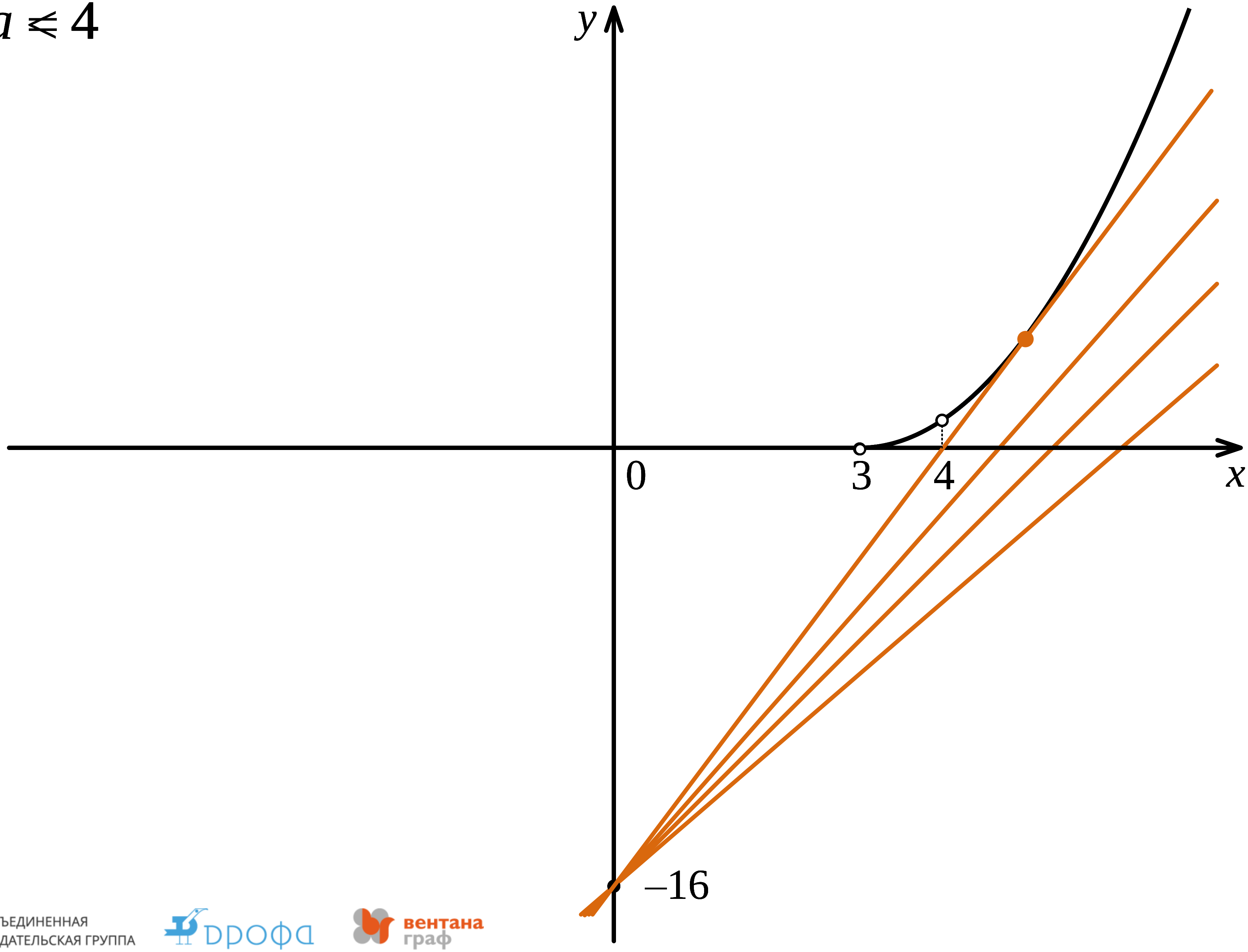
При каких значениях параметра a уравнение $\log_{x-3}(ax-16)=2$ имеет единственное решение?

Данное уравнение равносильно системе:

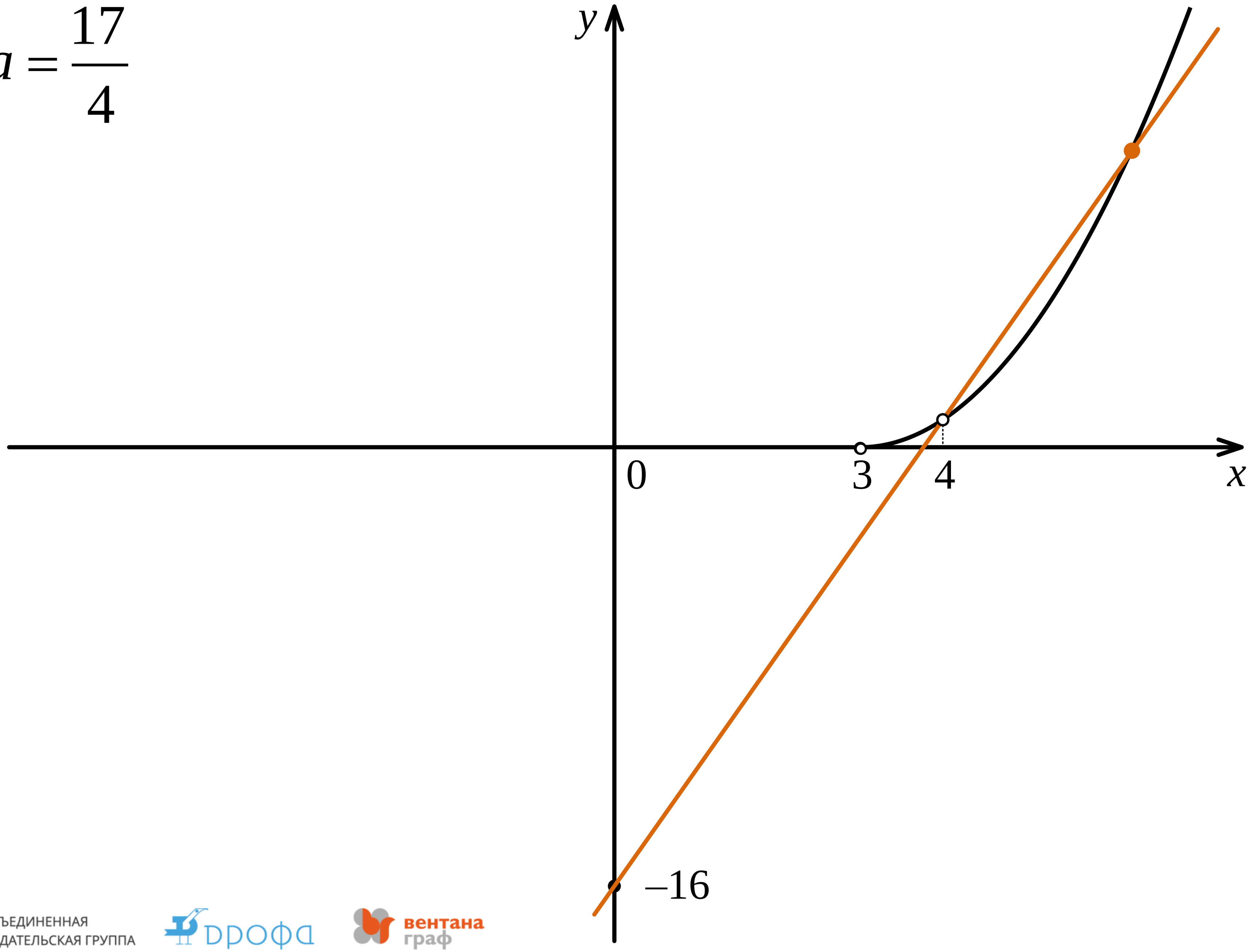
$$\begin{cases} ax - 16 = (x-3)^2, \\ x > 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$$


y
x
0
3
4
–16

$a \leqslant 4$

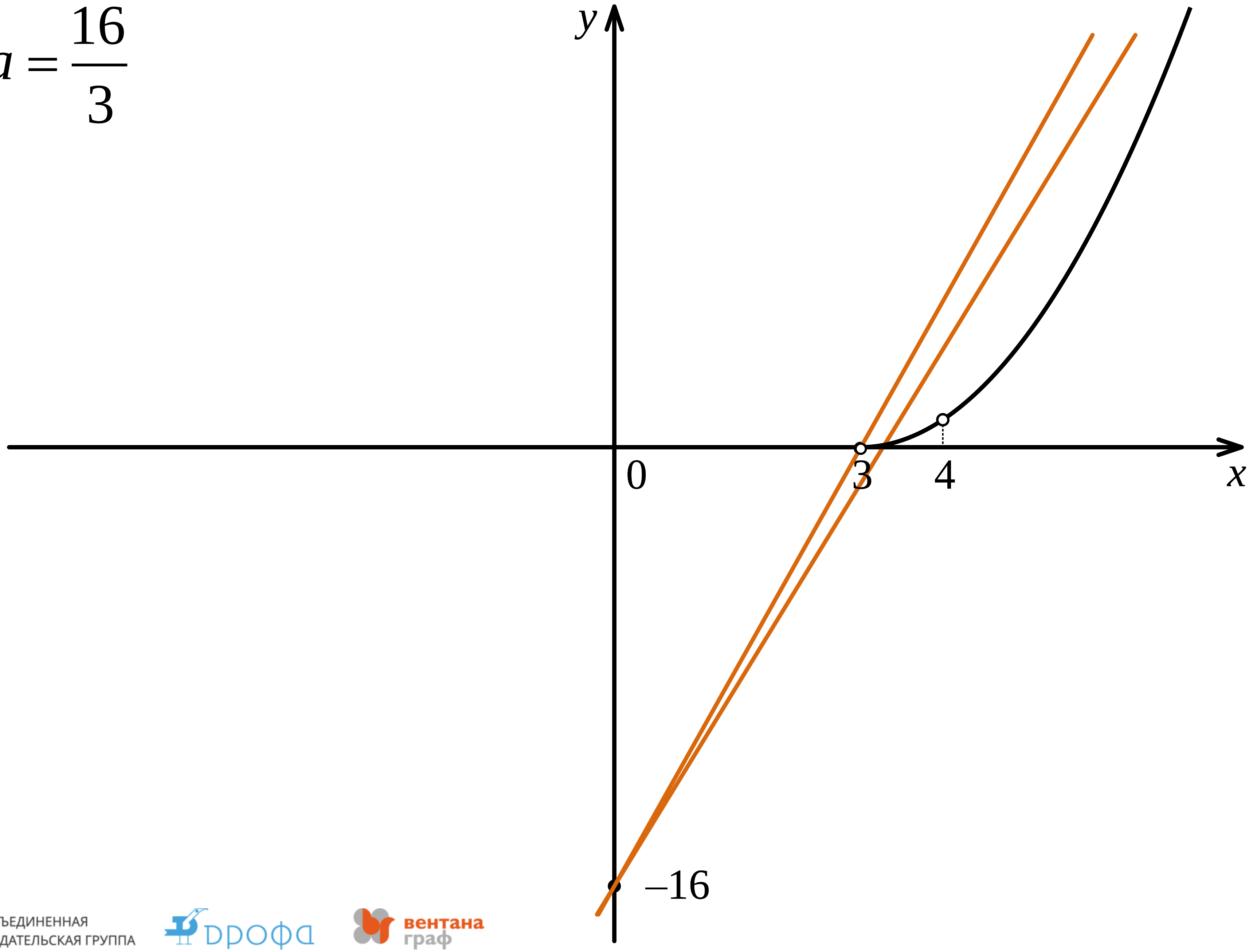


$$a = \frac{17}{4}$$

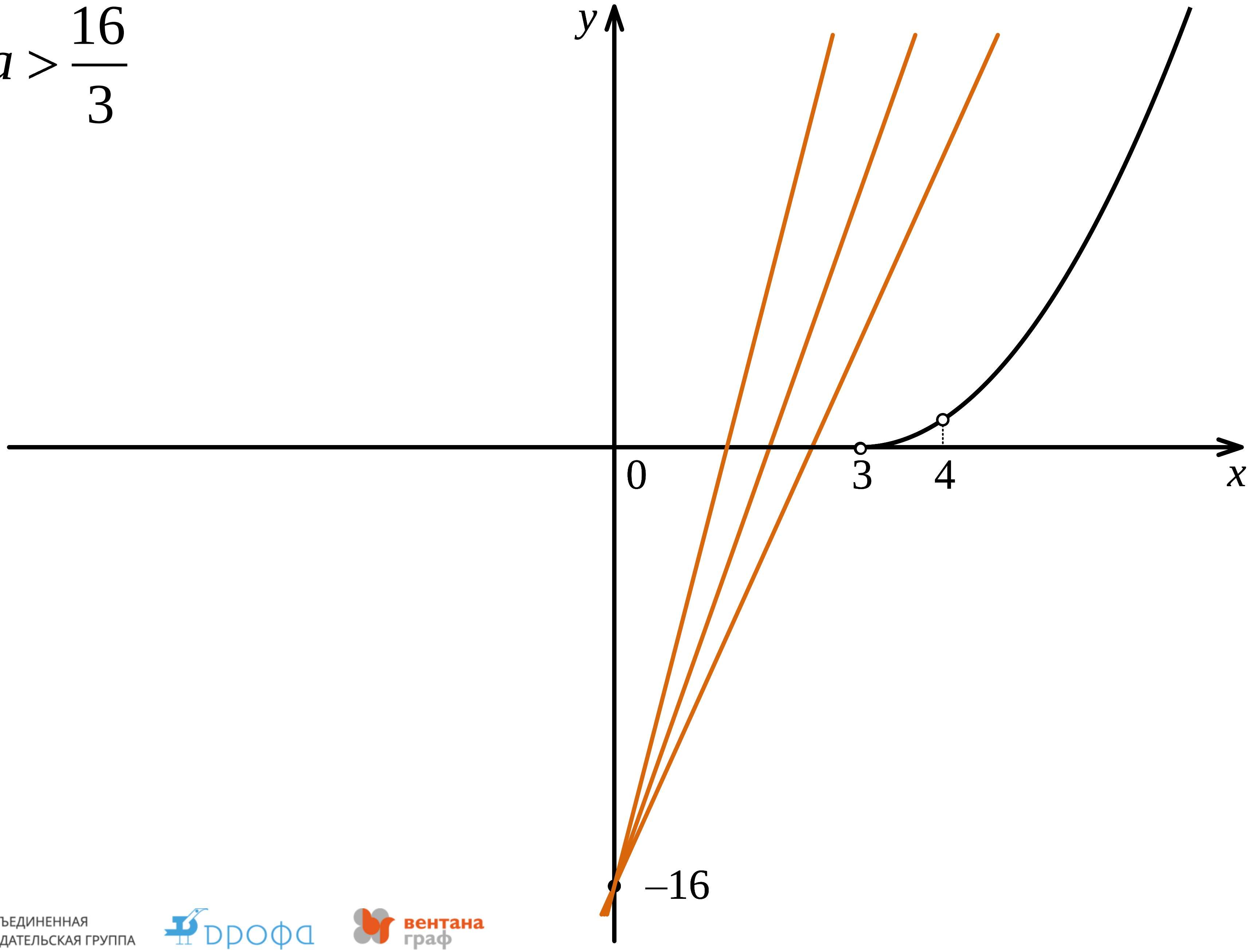


ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА дрофа вентана граф

$$a = \frac{16}{3}$$



$$a > \frac{16}{3}$$



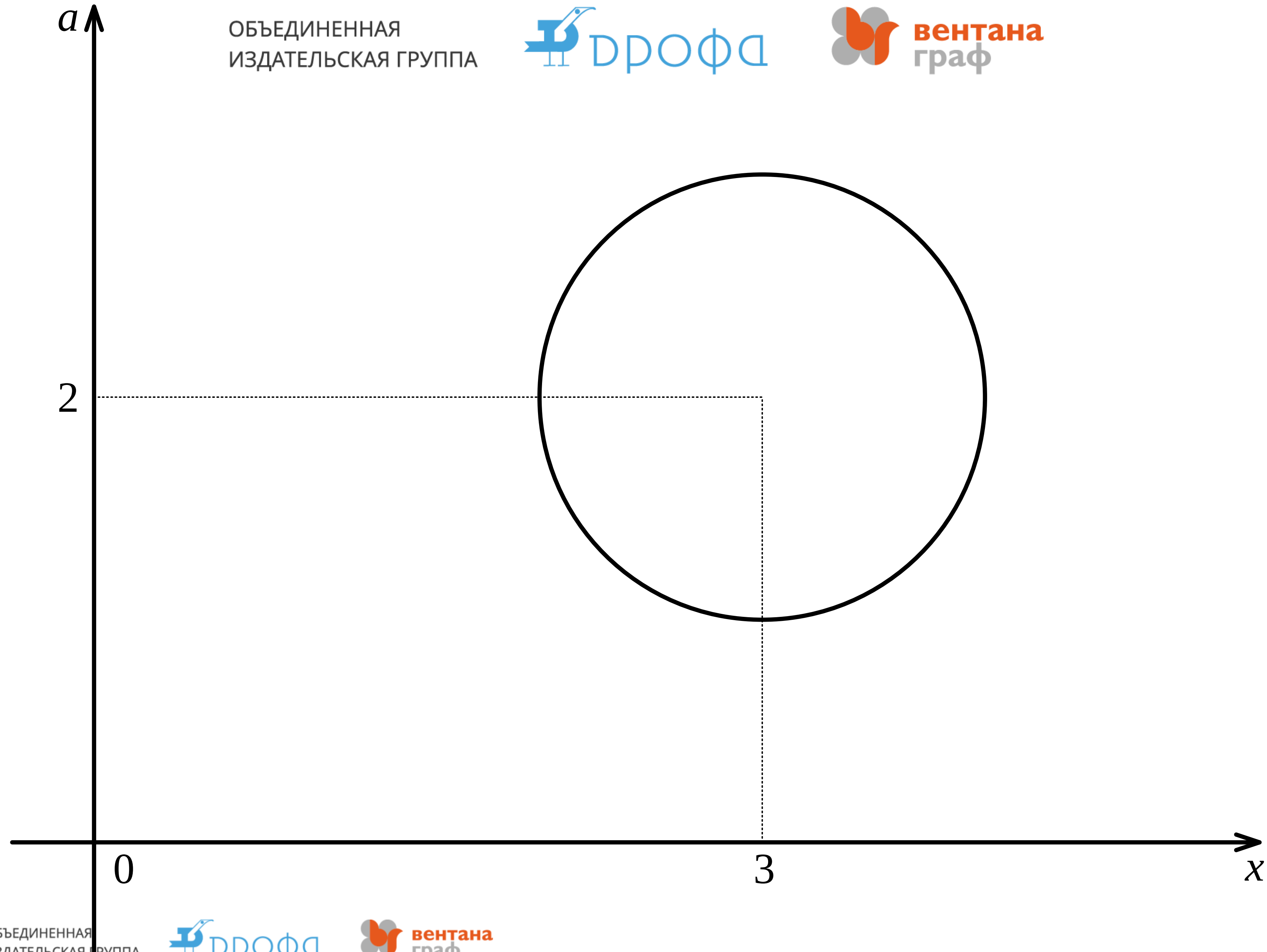
Ответ: $a = 4,\ a = \dfrac{17}{4},\ a \geq \dfrac{16}{3}.$

При каких значениях параметра a модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение?

Перепишем данное уравнение так:

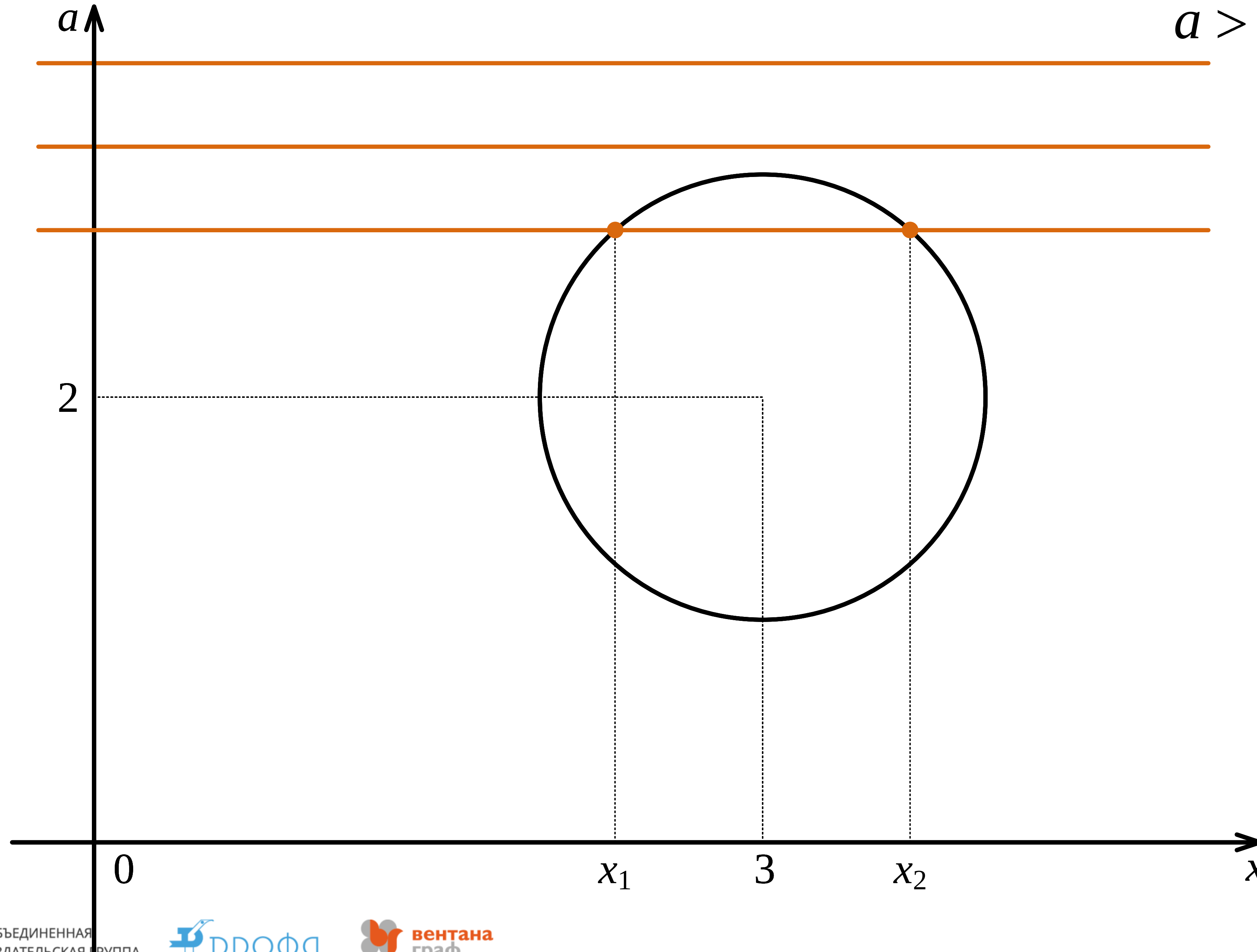
$$(x-3)^2+(a-2)^2=1.$$

Его графиком в системе координат $x0a$ является окружность.

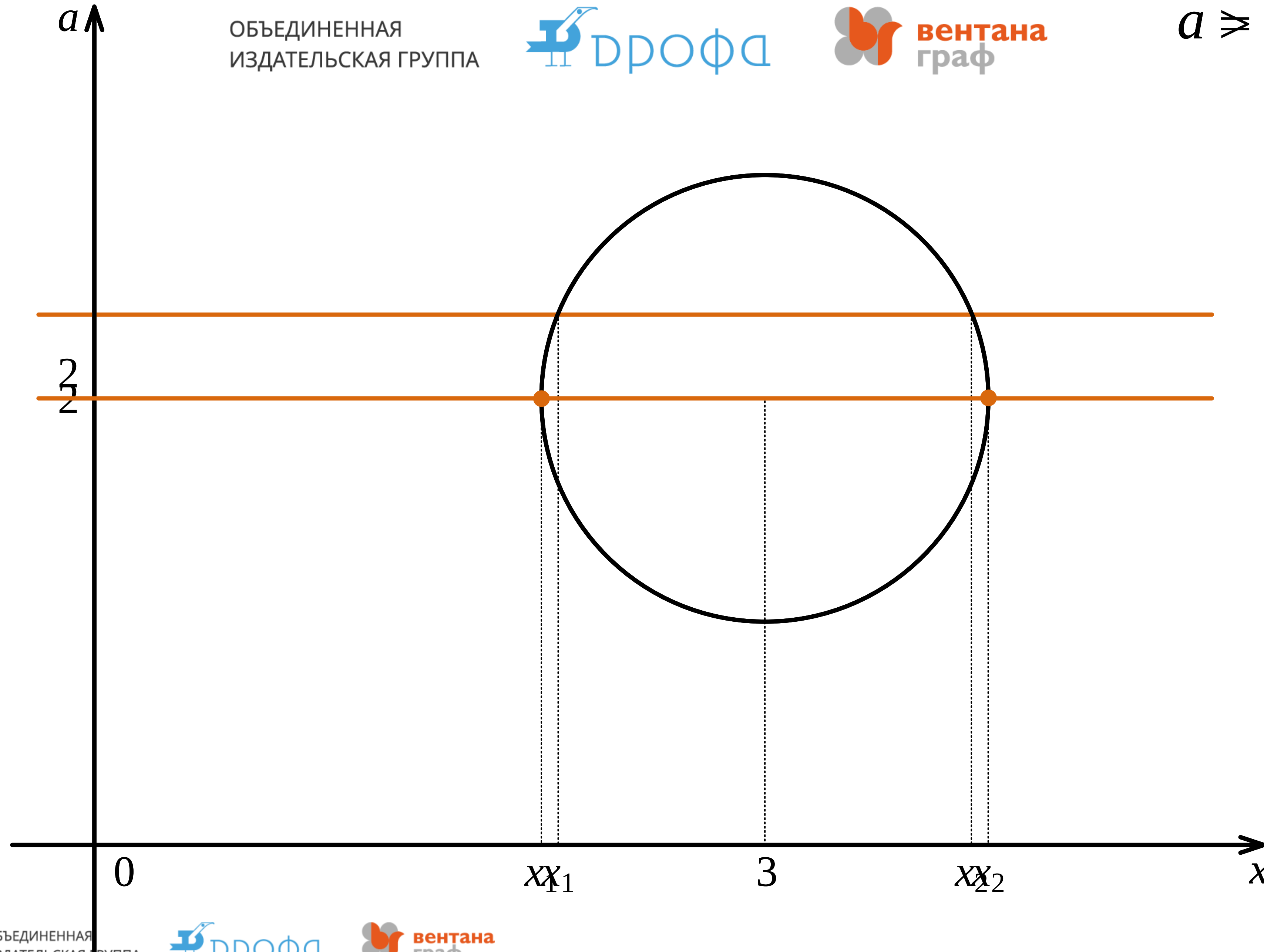


ОБЪЕДИНЕННАЯ
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
дрофа
вентана
граф

$a > 2$

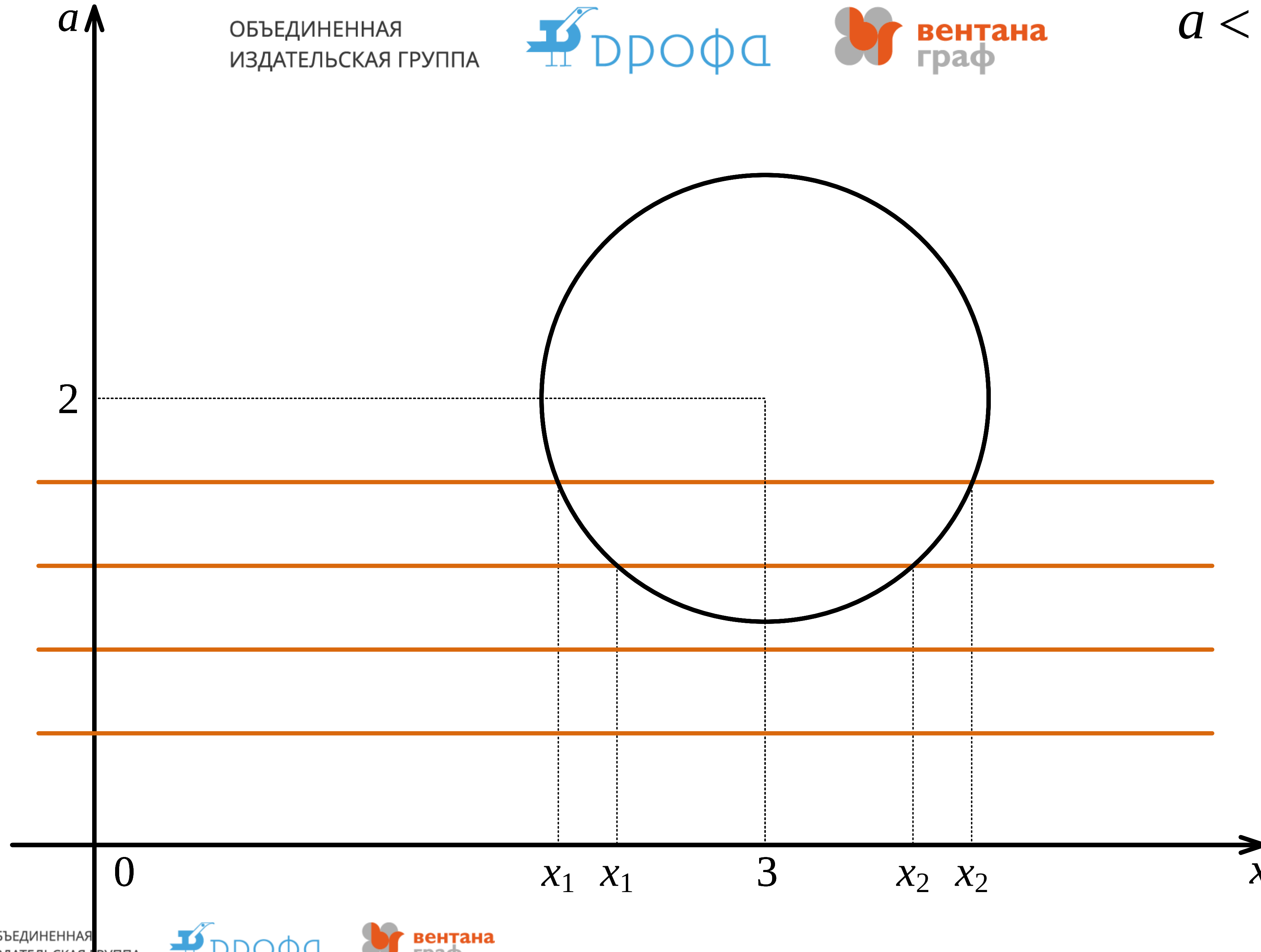


$a \geqslant 2$



ОБЪЕДИНЕННАЯ
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
дрофа
вентана граф

$a < 2$

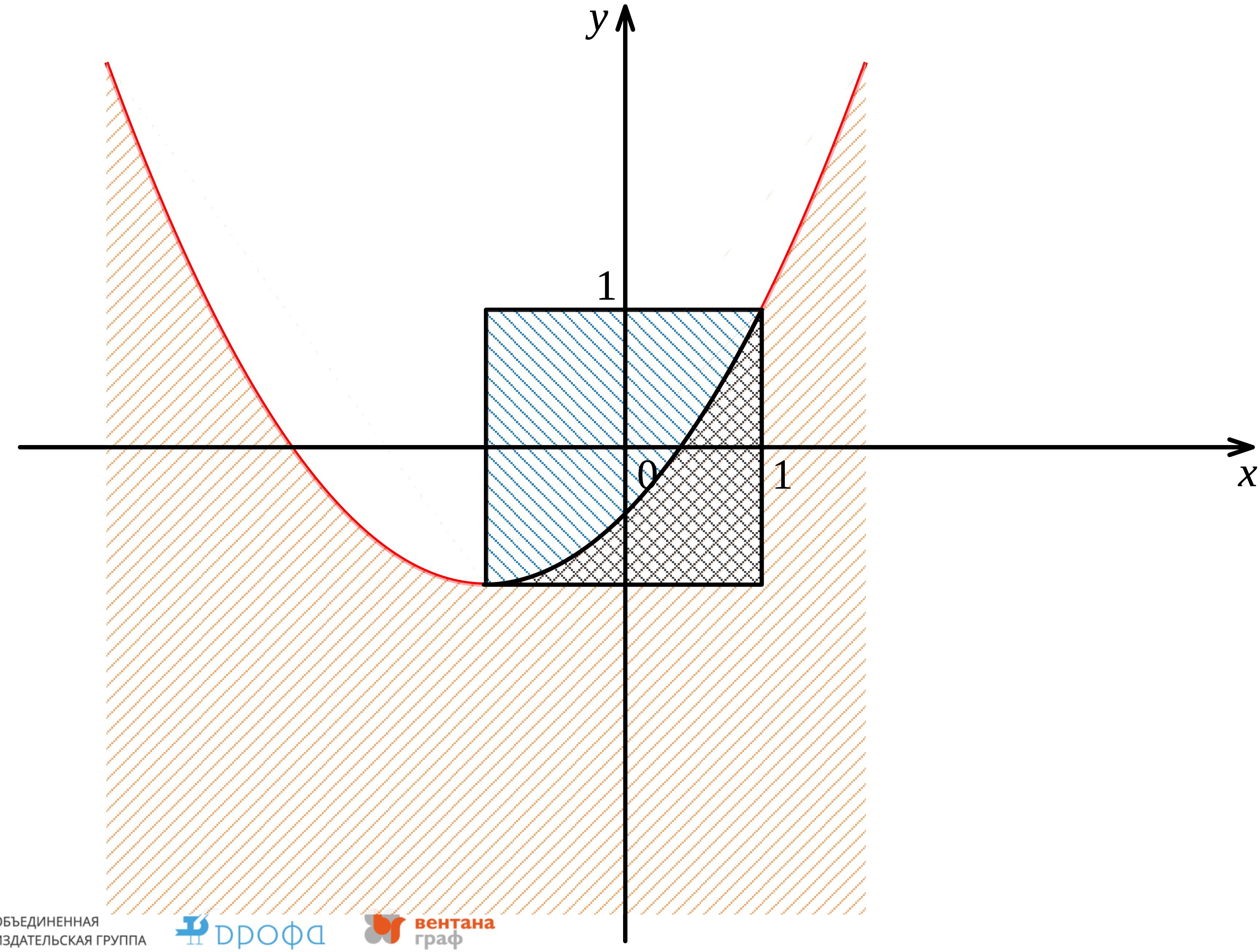


ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА дрофа вентана граф

Ответ: $a = 2$.

Постройте множество точек координатной плоскости $x0y$, координаты которых являются решением системы

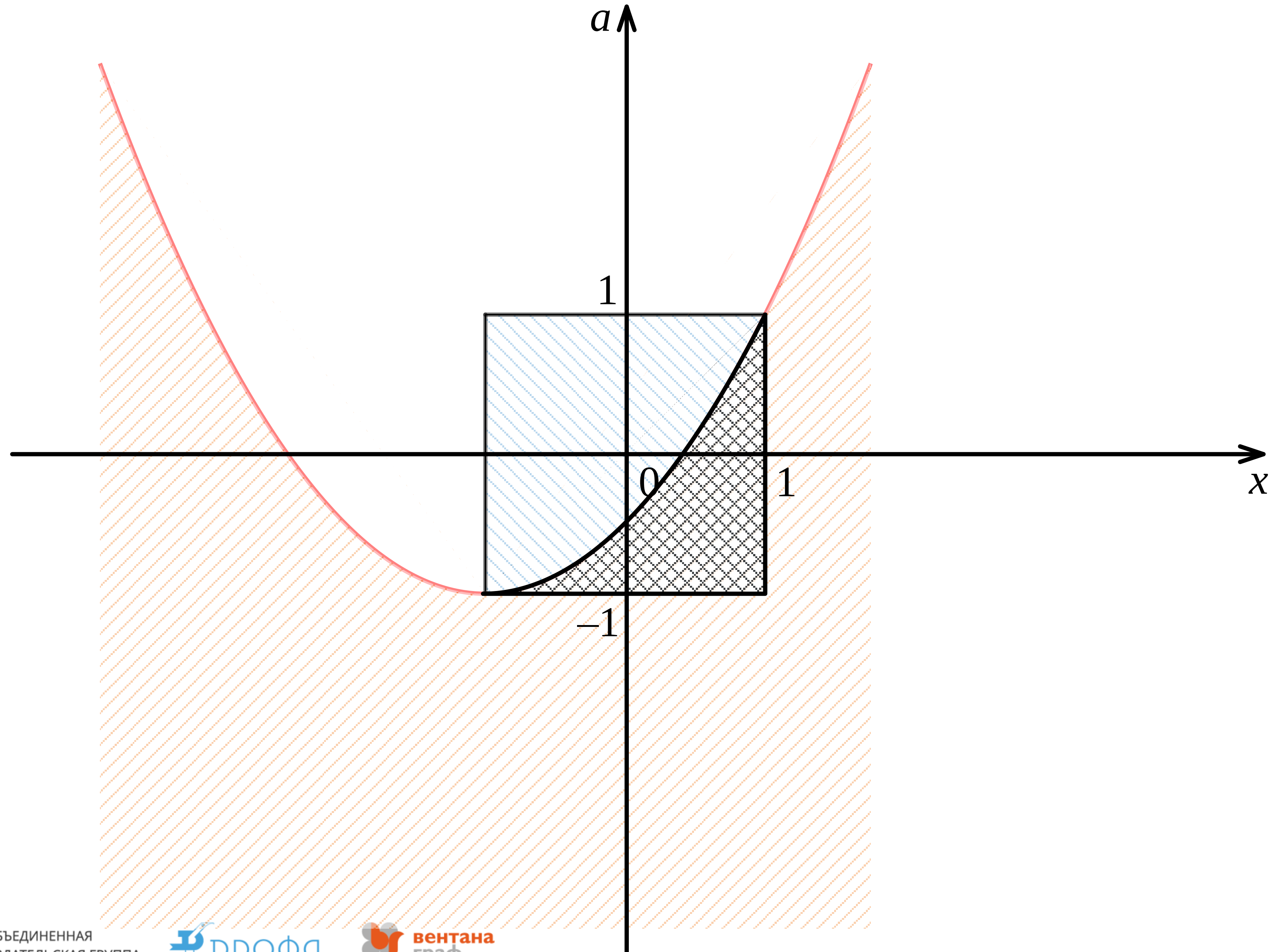
$$\begin{cases} |x-y|+|x+y|\le 2, \\ x^2+2x\ge 2y+1. \end{cases}$$


y
x
1
0
1

При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} |x-a|+|x+a|\le 2, \\ x^2+2x\ge 2a+1 \end{cases}$$

имеет...


a
1
0
1
x
−1

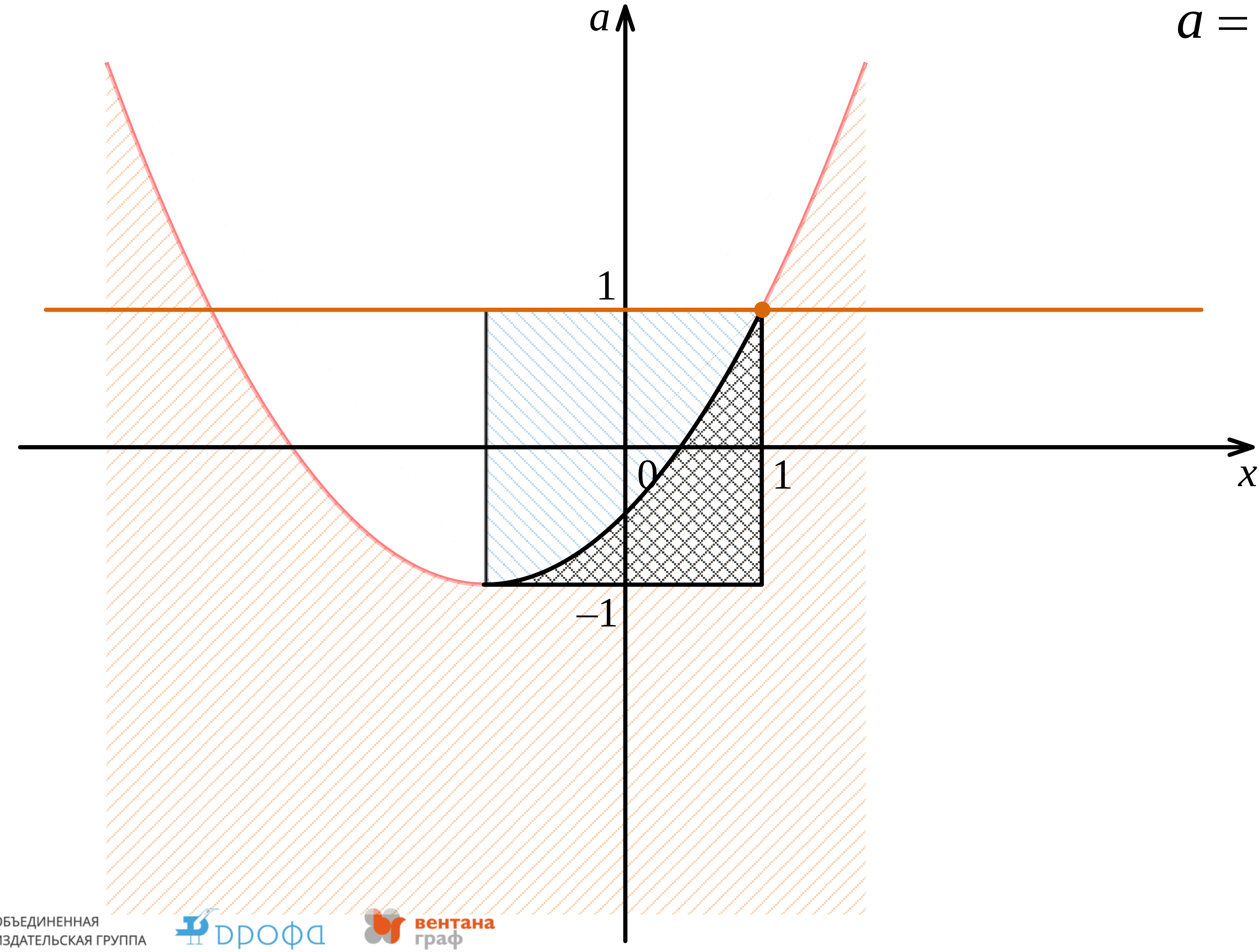
При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} |x-a|+|x+a| \le 2, \\ x^2+2x \ge 2a+1 \end{cases}$$

имеет:

1) одно решение;

$a = 1$

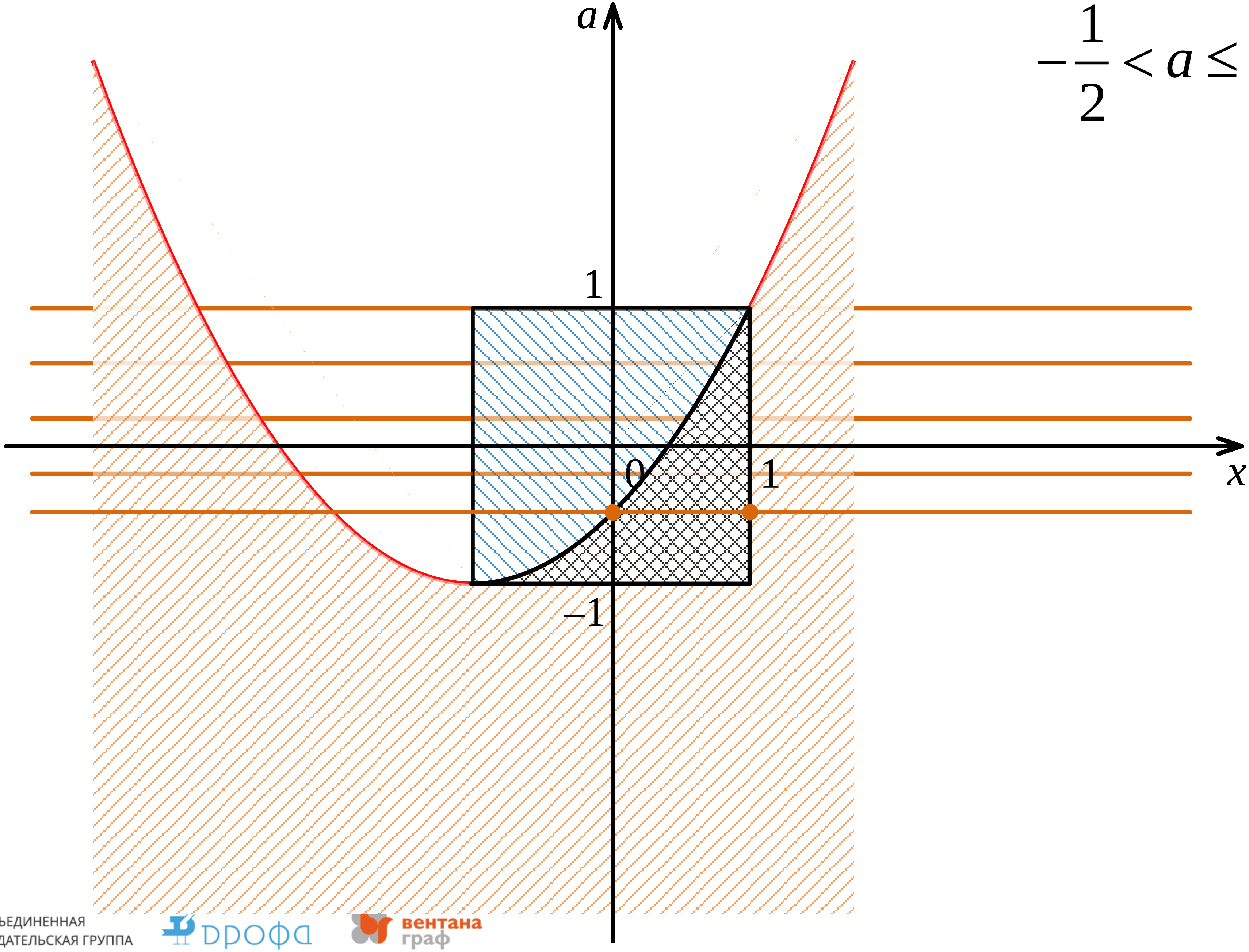


При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} |x-a|+|x+a| \le 2, \\ x^2+2x \ge 2a+1 \end{cases}$$

имеет:

2) только положительные решения;

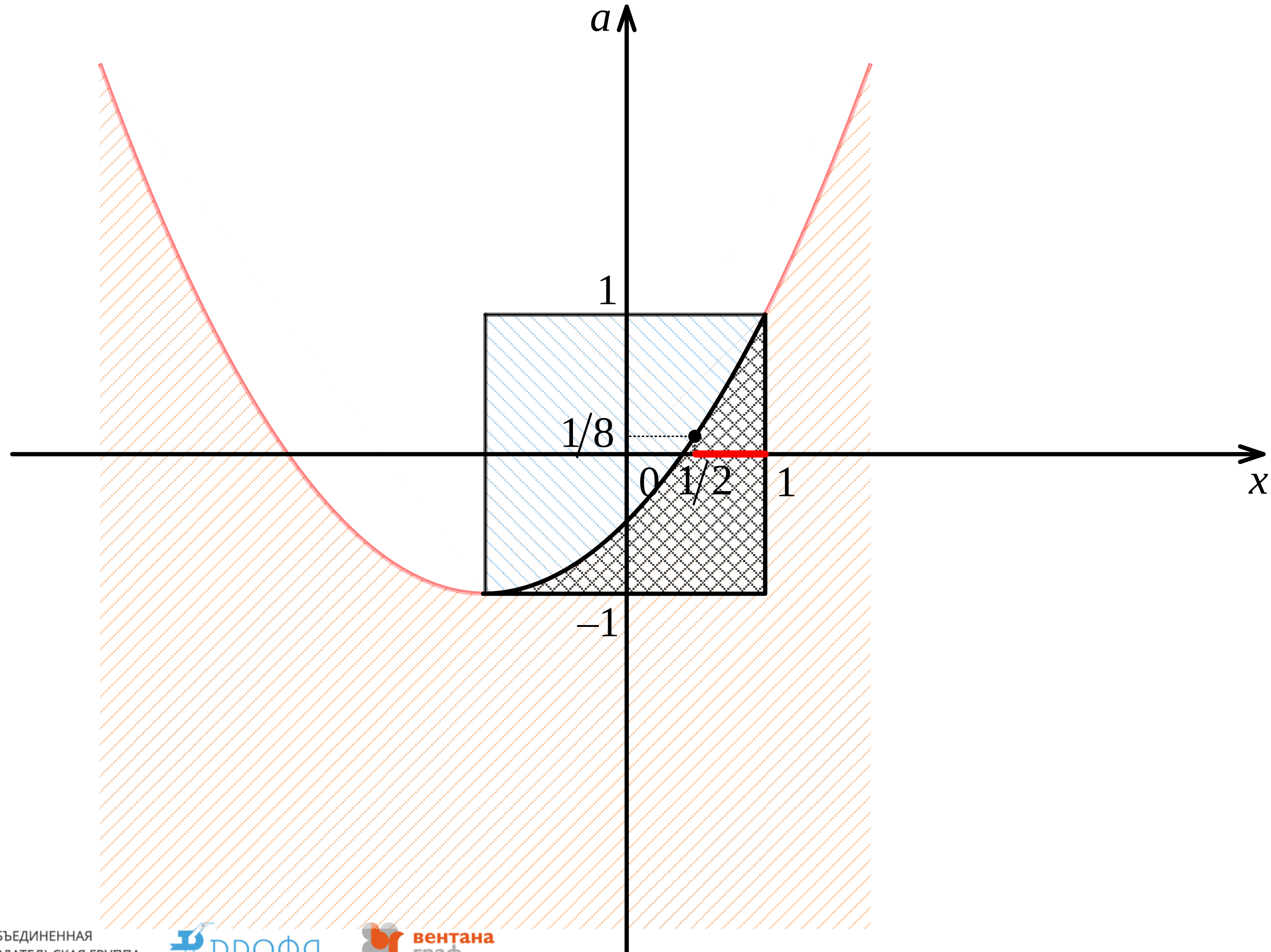


$$-\frac{1}{2} < a \le 1$$

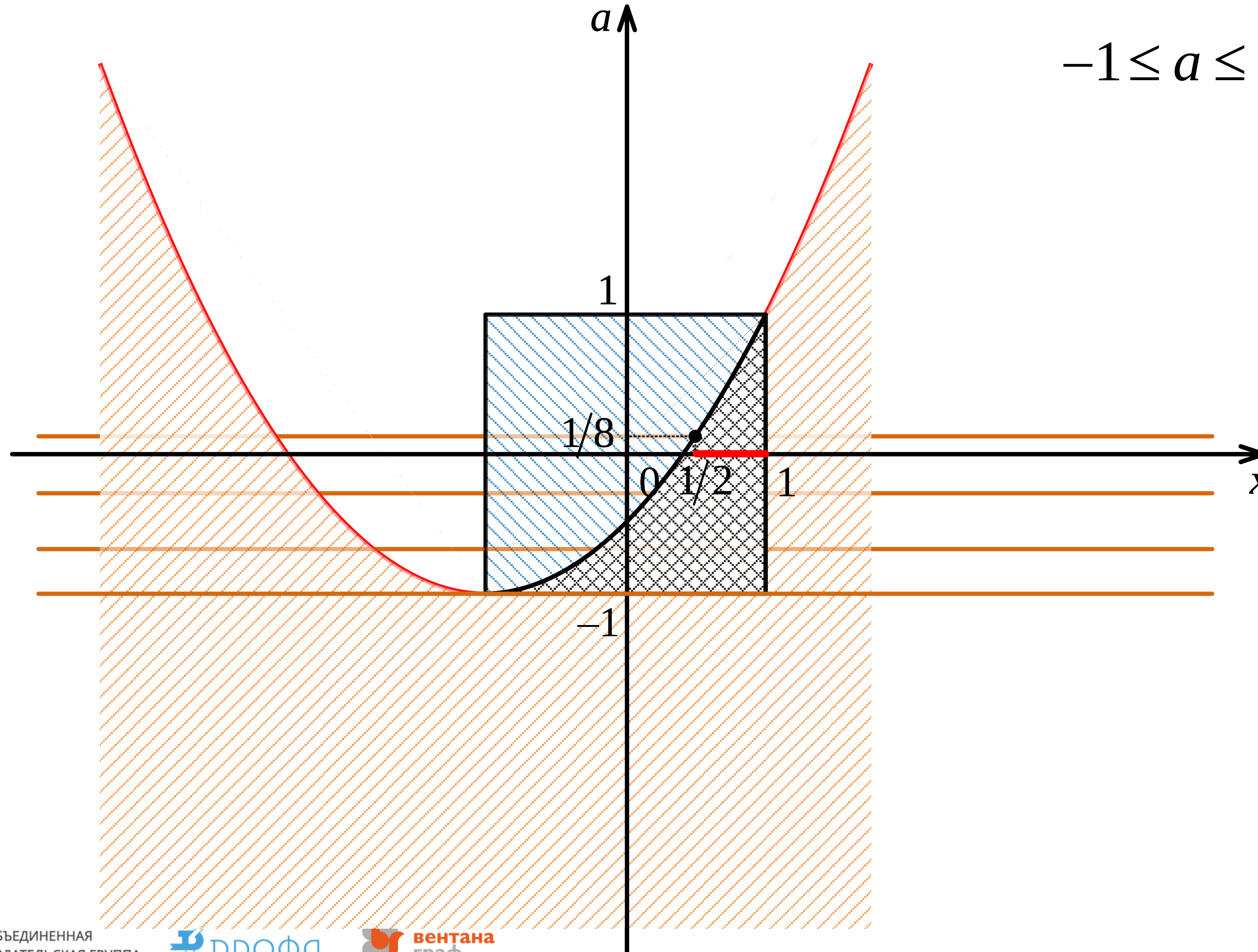
При каких значениях параметра a все решения системы неравенств

$$\begin{cases} |x-a|+|x+a|\le 2, \\ x^2+2x\ge 2a+1 \end{cases}$$

3) содержат промежуток $\left[\frac{1}{2};1\right]$;


a
1
1/8
0
1/2
1
x
–1

$$-1 \le a \le \frac{1}{8}$$

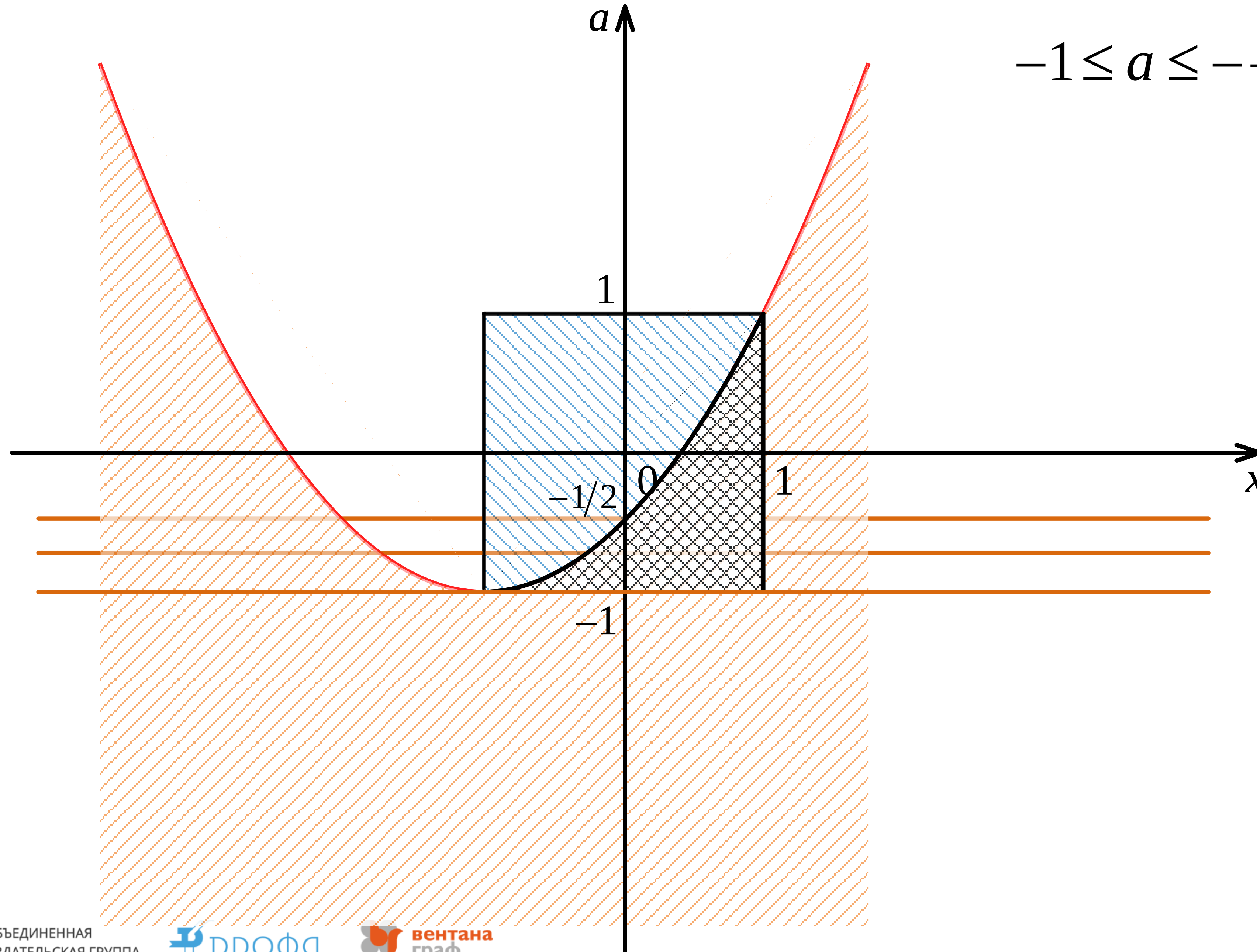


При каких значениях параметра a все решения системы неравенств

$$\begin{cases} |x-a|+|x+a| \le 2, \\ x^2+2x \ge 2a+1 \end{cases}$$

4) содержат не менее двух целых решений?

$$-1 \le a \le -\frac{1}{2}$$



ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА дрофа вентана граф

Благодарим за внимание!

Издательство «ДРОФА»
metodist@drofa.ru
sev@vgf.ru

Издательский центр «ВЕНТАНА-ГРАФ»
metod@vgf.ru
sev@vgf.ru

8-800-2000-550
8-495-795-05-50